

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN

SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN



PROYECTO FIN DE CARRERA

***LOCALIZACIÓN DISTRIBUIDA
EN REDES DE SENSORES BINARIOS***

Autor: RAÚL SESMERO RAMOS
Tutor: MARCELINO LÁZARO

FEBRERO DE 2011

Proyecto Fin de Carrera
LOCALIZACIÓN DISTRIBUIDA EN REDES DE SENSORES
BINARIOS

Autor
RAÚL SESMERO RAMOS

Tutor
MARCELINO LÁZARO

La defensa del presente Proyecto Fin de Carrera se realizó el día 22 de febrero de 2011, siendo calificada por el siguiente tribunal:

PRESIDENTE: David Luengo García.

SECRETARIA: María del Rocío Arroyo Valles.

VOCAL: Fernando Campo Paredes.

y habiendo obtenido la siguiente calificación:

CALIFICACIÓN:

Leganés, a 22 de febrero de 2011

*A mis seres queridos,
los presentes y los ausentes.*

Agradecimientos

Llegado este momento, que siempre me pareció muy lejano, quiero agradecer su ayuda a todas las personas que han contribuido para hacerlo realidad.

En primer lugar a mi tutor Marce al que estoy realmente agradecido, porque sin su ayuda, tiempo e infinita paciencia no hubiera podido terminar nunca este proyecto. Lamento haber sido tan desastre y haberte causado tantas molestias.

A mis padres, Isidoro y Carmen, por su amor, por su apoyo, por su comprensión y, sobre todo, por todos los sacrificios que han hecho por mí durante tanto tiempo. También a mis hermanas Carol y Arancha, que siempre me han dado su cariño y su ayuda de manera incondicional.

A mis sobrinos de verdad (Rubén, Irene y Ainara) y a los “postizos” (Candela, Diana y Pablo), a quienes adoro y con los que tanto disfruto.

A Nieves, gracias por ser la luz que ilumina mis penumbras, por ser la mano que me ayuda a levantarme, por ser el hombro que seca mis lagrimas, pero fundamentalmente, gracias por hacerme tan feliz.

A mis amigos, a todos, tanto los que siguen a mi lado como los que se quedaron por el camino. Me siento muy afortunado de estar rodeado de tantas grandes personas.

Por último, y de manera muy especial, a mis Abuelos y a mis amigos Isidro (Fausti) y Edu (Mari), porque a pesar de que la vida no ha permitido que disfrutaran este momento conmigo siempre les tengo en mi recuerdo.

Resumen

El presente Proyecto Fin de Carrera desarrolla un estudio sobre el problema de estimar la localización de un agente por medio de redes de sensores que emplean técnicas distribuidas. Concretamente, se analiza la influencia de diversos criterios de diseño de la red en la precisión de dicho problema, mediante el uso de tres reglas de fusión diferentes: estimador de máxima verosimilitud, estimador de mínimo riesgo empírico y un tercer método propuesto en este proyecto basado en distancias. Para ello, se emplea una red homogénea de sensores binarios —cuya información consiste en decidir si han detectado o no la presencia del agente— en la que la probabilidad de detección de cada sensor, p_d , se modela como una función de la distancia entre el sensor y el agente. Además, para mejorar los recursos energéticos de la red se analiza el rendimiento obtenido por un esquema de transmisión en el que sólo los sensores con lecturas positivas transmiten su información. Por medio de la simulación de los distintos estimadores en diferentes escenarios se logra obtener medidas cuantitativas de precisión del proceso de localización.

Palabras clave: estimación, localización distribuida, redes de sensores.

Abstract

The present Master Thesis develops a study of target location estimation problem in sensor networks by using distributed techniques. Specifically, the influence of several network design criteria in the accuracy of that problem is analyzed. This analysis is carried out by means of three different fusion rules to estimate the target location: a maximum likelihood estimation, a minimum empirical risk estimation and a third method, proposed in this project, based on distances. A binary homogeneous sensor network —whose information consists in deciding if the target is detected or not— is used and the probability of detection of each sensor in the network, p_d , is modeled as a function of the distance between sensor and target. Moreover, in order to improve the energy resources of the network, it is studied the performance of a transmission scheme where only sensors with a positive detection transmit their information. By simulating the different estimation methods in several environments, quantitative measures of target location accuracy are achieved.

Key words: distributed location, estimation, sensor networks.

Índice General

1. Introducción y objetivos	1
2. Revisión de antecedentes	5
2.1. Visión general de las redes de sensores	5
2.1.1. Características de las redes de sensores	7
2.1.2. Aplicaciones	12
2.2. Gestión de energía en redes de sensores	14
2.2.1. Consideraciones de energía en los nodos sensores	14
2.2.2. Consideraciones de energía globales en la red	18
2.3. Reglas de fusión óptimas: nivel global o nivel local	21
2.4. Detección distribuida de objetivos	23
2.5. Localización distribuida de objetivos	26
3. Planteamiento teórico	31
3.1. Formulación del problema	31
3.2. Modelos de probabilidad de detección	34
3.3. Definición de áreas y despliegues	41
3.4. Localización del agente	44
3.4.1. Método de máxima verosimilitud (ML)	46
3.4.2. Método de mínimo riesgo empírico (ERM)	54
3.4.3. Método basado en distancias	60
4. Resultados	65
4.1. Simulación y escenarios del proceso de localización	67
4.1.1. Definición de las clases de sensores	67
4.1.2. Despliegue de los sensores	70
4.1.3. Generación de lecturas de los sensores	73
4.1.4. Generación de la estimación en función de la regla de fusión	78
4.1.5. Escenario de referencia	87
4.2. Comparativa de prestaciones según el tipo de probabilidad de detección	88
4.3. Comparativa de prestaciones según la forma de la región de estudio	93

4.4.	Comparativa de prestaciones según el tipo de despliegue	97
4.5.	Comparativa de prestaciones según las características de sensores	100
4.5.1.	Comparativa según la clase	100
4.5.2.	Comparativa según la probabilidad de falsa alarma y de pérdida	103
4.5.3.	Comparativa según el rango de los sensores	105
4.6.	Análisis de prestaciones en función de la posición del objetivo a localizar	109
5.	Conclusiones y líneas futuras	119
5.1.	Conclusiones	119
5.2.	Líneas futuras de investigación	122
	Apéndices	123
A.	Planificación y presupuesto	125
A.1.	Descomposición en tareas	125
A.2.	Recursos	130
A.3.	Planificación con el diagrama de fases de ejecución detallado .	130
A.4.	Presupuesto de proyecto	132
B.	Equivalencia entre probabilidades de detección	133
B.1.	Probabilidad tipo <i>sombrero cordobés</i>	134
B.2.	Probabilidad tipo lineal	134
B.3.	Probabilidad tipo exponencial norma 2 al cuadrado	135
B.4.	Probabilidad tipo exponencial norma 2	136
C.	Cálculo de gradientes	139
C.1.	Gradientes para la probabilidad de tipo lineal	139
C.1.1.	Máxima verosimilitud sin censura	140
C.1.2.	Máxima verosimilitud con censura	142
C.1.3.	Riesgo empírico sin censura	144
C.1.4.	Riesgo empírico con censura	146
C.2.	Gradientes para la probabilidad de tipo exponencial cuadrado	148
C.2.1.	Máxima verosimilitud sin censura	148
C.2.2.	Máxima verosimilitud con censura	150
C.2.3.	Riesgo empírico sin censura	152
C.2.4.	Riesgo empírico con censura	153
C.3.	Gradientes para la probabilidad de tipo exponencial	155
C.3.1.	Máxima verosimilitud sin censura	155
C.3.2.	Máxima verosimilitud con censura	157
C.3.3.	Riesgo empírico sin censura	159
C.3.4.	Riesgo empírico con censura	161

D. Cálculo del estimador basado en distancias	165
D.1. Estimador sin censura	165
D.2. Estimador con censura	167
Glosario	171
Bibliografía	173

Lista de Figuras

2.1. Nodos sensores diseminados en el campo de sensores	7
2.2. Red mallada, red en estrella y red híbrida	8
2.3. Torre de protocolos de las redes de sensores	8
2.4. Arquitectura de un nodo sensor	10
2.5. Arquitectura para el reenvío eficiente de paquetes	17
2.6. Modelo de red de sensores con fusión local	22
2.7. Fusión global y fusión local	23
3.1. Diagrama de bloques del proceso de localización	32
3.2. Ejemplo de probabilidad de detección tipo <i>sombrero cordobés</i> .	36
3.3. Ejemplo de probabilidad de detección tipo lineal	36
3.4. Ejemplo de probabilidad de detección tipo exponencial norma 2 al cuadrado	37
3.5. Ejemplo de probabilidad de detección tipo exponencial norma 2	37
3.6. Nivel de falsa alarma común a todos los tipos de probabilidad de detección	39
3.7. Ejemplo de equivalencia entre los tipos de probabilidad de detección	40
3.8. Representación de las regiones \mathcal{D} y \mathcal{D}' de tipo cuadrado cuyos lados $2r_e$ y $2r'_e$	41
3.9. Regiones \mathcal{D} y \mathcal{D}' circulares de radios r_e y r'_e	42
3.10. Despliegue de sensores ordenado en rejilla en la región \mathcal{D} en escenarios cuadrado y circular.	43
3.11. Ejemplo de corrección de la estimación final	45
3.12. Representación de la región \mathcal{D}''	63
4.1. Representación del rango de un sensor de la Clase A	68
4.2. Representación del rango de un sensor de la Clase B	69
4.3. Representación del rango de un sensor de la Clase C	69
4.4. Ejemplo de escenarios I y II.	70
4.5. Ejemplo de escenarios III y IV.	71
4.6. Error de localización de cada una de las clases de sensores (expresado en distancia media) en función de la relación r_e/r'_e	72

4.7. Probabilidades de detección equivalentes utilizadas para la generación de lecturas	75
4.8. Ejemplo de generación de lecturas para una p_d de tipo <i>sombrero cordobés</i>	76
4.9. Ejemplo de generación de lecturas para una p_d de tipo lineal	76
4.10. Ejemplo de generación de lecturas para una p_d de tipo exponencial al cuadrado	77
4.11. Ejemplo de generación de lecturas para una p_d de tipo exponencial	77
4.12. Generación de las lecturas de los sensores para el escenario propuesto.	79
4.13. Función de verosimilitud generada a partir de las lecturas y posiciones de los sensores de la red	80
4.14. Representación de la estimación inicial lograda para el método ML	80
4.15. Evolución de la verosimilitud de la estimación obtenida en cada iteración del algoritmo de búsqueda	81
4.16. Representación de la estimación final lograda para el método ML	81
4.17. Función de riesgo empírico generada a partir de las lecturas y posiciones de los sensores de la red	82
4.18. Representación de la estimación inicial lograda para el método ERM	83
4.19. Evolución del riesgo de la estimación obtenida en cada iteración del algoritmo de búsqueda.	83
4.20. Representación de la estimación final lograda para el método ERM	84
4.21. Función de coste del estimador basado en distancias, generada a partir de las posiciones de los sensores de la red con lecturas positivas	84
4.22. Representación de la estimación final lograda para el método basado en distancias	85
4.23. Representación de la estimación final lograda para mejora del método basado en distancias	86
4.24. Función de coste de la mejora del estimador basado en distancias, generada a partir de las posiciones de los sensores de la región \mathcal{D}' con lecturas positivas	86
4.25. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador ML sin censura con cada uno de los tipos de probabilidad de detección.	89
4.26. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador ML con censura con cada uno de los tipos de probabilidad de detección.	89

4.27. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador ERM sin censura con cada uno de los tipos de probabilidad de detección.	90
4.28. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador ERM con censura con cada uno de los tipos de probabilidad de detección.	90
4.29. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador basado en distancia (con censura) con cada uno de los tipos de probabilidad de detección.	91
4.30. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para la mejora del estimador basado en distancia (con censura) con cada uno de los tipos de probabilidad de detección.	91
4.31. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML y ERM (cuando no existe censura) obtenidas sobre regiones circulares y cuadradas equivalentes.	94
4.32. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML y ERM con censura, obtenidas sobre regiones circulares y cuadradas equivalentes.	94
4.33. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador basado en distancia y para el estimador mejorado de éste, obtenidas sobre regiones circulares y cuadradas equivalentes.	95
4.34. Representación de un escenario circular y otro cuadrado equivalentes, y de la región \mathcal{R} de un agente situado en el límite de la región \mathcal{D}' en cada escenario.	96
4.35. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML y ERM (cuando no existe censura) obtenidas con despliegue aleatorio y despliegue ordenado de sensores.	98
4.36. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML y ERM con censura, obtenidas con despliegue aleatorio y despliegue ordenado de sensores.	98
4.37. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador basado en distancia y para el estimador mejorado de éste, obtenidas con despliegue aleatorio y despliegue ordenado de sensores.	99
4.38. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML, ERM, MLc, ERMc, Dist y DistM obtenida para una red homogénea de sensores de mejores prestaciones (Clase A)	101

4.39. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML, ERM, MLc, ERMc, Dist y DistM obtenida para una red homogénea de sensores de mejores prestaciones (Clase B).	102
4.40. Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML, ERM, MLc, ERMc, Dist y DistM obtenida para una red homogénea de sensores de mejores prestaciones (Clase C).	102
4.41. Evolución de la distancia de error promedio de los estimadores ML, ERM, MLc, ERMc, Dist y DistM en función del valor de las probabilidades α y β	104
4.42. Evolución de la distancia de error promedio de los estimadores ML, ERM, MLc, ERMc, Dist y DistM en función del valor de θ	107
4.43. Evolución de la distancia de error promedio de los estimadores Dist y DistM en función del valor de θ	107
4.44. Ejes de simetría en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada.	110
4.45. Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador Dist, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma circular.	111
4.46. Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador Dist, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada	111
4.47. Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador ML, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma circular	112
4.48. Sección de la Figura 4.47 que representa la precisión del estimador ML en una región \mathcal{D}' de forma circular, en función de la distancia del agente al origen de coordenadas.	112
4.49. Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador ML, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada	113
4.50. Sección de la Figura 4.49 que representa la precisión del estimador ML en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada, en función de la distancia del agente al origen de coordenadas.	113
4.51. Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador Dist, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma circular y sin corrección de la estimación final.	115
4.52. Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador Dist, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada y sin corrección de la estimación final.	115

4.53. Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador ML, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma circular y sin corrección de la estimación final.	116
4.54. Sección de la Figura 4.53 que representa la precisión del estimador ML (sin corrección final) en una región \mathcal{D}' de forma circular, en función de la distancia del agente al origen de coordenadas.	116
4.55. Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador ML, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada y sin corrección de la estimación final.	117
4.56. Sección de la Figura 4.55 que representa la precisión del estimador ML (sin corrección final) en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada, en función de la distancia del agente al origen de coordenadas.	117
A.1. Diagrama de Gantt de las principales tareas	130
A.2. Diagrama de Gantt detallado de la planificación del proyecto	131

Lista de Tablas

4.1. Parámetros de las clases de sensores utilizadas en la simulación	72
4.2. Dimensiones de las regiones circulares y cuadradas utilizadas en las simulaciones.	73
4.3. Valores de los parámetros r_o y θ para cada tipo de p_d	74
4.4. Error obtenido para cada estimador en el ejemplo desarrollado.	87
4.5. Valores de los parámetros r_o y θ para cada tipo de p_d	88
4.6. Parámetros de las clases de sensores utilizadas en la simulación	100
A.1. Resumen de las tareas del proyecto	129
A.2. Desglose presupuesto	132
C.1. Vectores del gradiente para ML con p_d de tipo lineal	142
C.2. Vectores del gradiente para ML censurado con p_d de tipo lineal	144
C.3. Vectores del gradiente para ERM con p_d de tipo lineal	146
C.4. Vectores del gradiente para ERM censurado con p_d de tipo lineal	148
C.5. Vectores del gradiente para ML con p_d de tipo exponencial al cuadrado	150
C.6. Vectores del gradiente para ML censurado con p_d de tipo exponencial al cuadrado	151
C.7. Vectores del gradiente para ERM con p_d de tipo exponencial al cuadrado	153
C.8. Vectores del gradiente para ERM censurado con p_d de tipo exponencial al cuadrado	154
C.9. Vectores del gradiente para ML con p_d de tipo exponencial	157
C.10. Vectores del gradiente para ML censurado con p_d de tipo exponencial	159
C.11. Vectores del gradiente para ERM con p_d de tipo exponencial	161
C.12. Vectores del gradiente para ERM censurado con p_d de tipo exponencial	162

Capítulo 1

Introducción y objetivos

Las redes de sensores representan una de las herramientas más útiles para el conocimiento y el control del mundo físico que nos rodea. Este hecho las ha convertido, en los últimos años, en una de las áreas de investigación de mayor interés, llegando a ser señalada como una de las tecnologías más importantes del presente siglo [Chong y Kumar, 2003].

Típicamente, las redes de sensores se componen de un gran número de dispositivos de pequeño tamaño, reducido coste y bajo consumo, que se encuentran densamente distribuidos en una región de interés. Estos dispositivos recopilan información física sobre el entorno que les rodea y la envían a un sistema central (centro de fusión) que es el encargado de analizar dicha información mediante técnicas estadísticas denominadas reglas de fusión. Las comunicaciones se realizan, generalmente, mediante enlaces inalámbricos de pequeño ancho de banda.

En función de la manera en que los datos son procesados por la red, existen distintos modelos de redes de sensores, de los cuales destacan los modelos de redes distribuidas gracias a las ventajas que ofrecen. Éstos se caracterizan porque los sensores que las componen son capaces de realizar un procesamiento de los datos a nivel local antes de enviarlos al centro fusor. Con este procesamiento, que habitualmente conlleva pérdidas de compresión, se condensa la información enviada, y se obtiene, entre otras mejoras, una mayor eficiencia en el uso de los recursos.

Precisamente, uno de los aspectos más cruciales para las redes de sensores lo representa el consumo de energía en ellas. Generalmente, la energía que reciben los sensores se proporciona por medio de baterías, cuyo reemplazo no resulta normalmente una opción factible, ya que las redes están formadas por un elevado número de sensores. Esta limitada energía de la que disponen los sensores implica que sus capacidades de adquisición, procesamiento y transmisión de datos se encuentran fuertemente restringidas para lograr que el tiempo de vida de la red sea razonable (del orden de meses a años). De esta forma,

es fundamental el desarrollo de estrategias de control energético a todos los niveles, como son el uso de componentes electrónicos de bajo consumo, el diseño de sistemas operativos y arquitecturas de red específicas, estrategias de transmisión que reduzcan las comunicaciones de la red y el desarrollo de protocolos energéticamente eficientes.

Como muchas otras tecnologías, su aplicación en el campo militar, gracias a la capacidad de generar nuevos sistemas de reconocimiento y vigilancia, fue el motor que empujó su desarrollo. Sin embargo, su gran potencial ha permitido la creación de innumerables aplicaciones en el terreno civil, como por ejemplo: telemática, agricultura de precisión, automatización industrial, monitorización sanitaria y médica, exploración de hábitats, detección y actuación ante desastres, edificios inteligentes y gestión de centros gubernamentales entre otras.

Todas estas aplicaciones se fundamentan en la realización de tareas como son la detección, la localización y la clasificación de objetivos o fenómenos físicos. Consecuentemente, para el correcto funcionamiento de dichas aplicaciones de mayor nivel, resulta crítica la precisión de estas operaciones. Por este motivo, el presente proyecto pretende aumentar el conocimiento sobre las prestaciones de una de estas tareas: la localización de objetivos.

El principal objetivo de este Proyecto Fin de Carrera es caracterizar las prestaciones del problema de localización distribuida de objetivos, mediante el uso de redes de sensores homogéneas (sensores con idénticas características), en función de diferentes parámetros de diseño de dichas redes.

Este estudio es importante ya que la flexibilidad de diseño que ofrecen las redes de sensores es una de sus características más distintivas. Criterios como las prestaciones individuales de los sensores (particularizando en el tipo de probabilidad de detección, la probabilidad de falsa alarma y la probabilidad de pérdida de cada sensor), el tipo de región estudiada, el tipo de despliegue empleado para la red, el número de sensores utilizados o la influencia de la posición del agente en la región de interés, son analizados en este proyecto.

En concreto, se emplea el entorno definido por [Artés-Rodríguez, 2004], compuesto por sensores binarios que aplican una decisión dura a la información recogida, y cuya misión se reduce a decidir si han detectado o no la presencia de un agente en la red. Además, la probabilidad de detección de cada sensor se modela como una función que varía con la distancia entre dicho sensor y el agente a localizar, y su forma depende de la aplicación concreta que se desarrolla.

La caracterización de prestaciones es realizada por medio de la comparación de tres reglas de fusión diferentes. Dichas reglas son métodos estadísticos con los que se realiza una estimación de la posición del agente presente en la red, en función de los datos enviados por los sensores. Dos de los métodos

estudiados (que aparecen descritos en [Artés-Rodríguez et al., 2004]), son el método de máxima verosimilitud y el método de mínimo riesgo empírico, y se caracterizan porque sus costes son resultado de la combinación de la función de probabilidad de detección de los sensores. El último método es propuesto en este proyecto, y consiste en un estimador cuyo coste se basa en la distancia existente entre el agente a localizar y los sensores que componen la red.

La respuesta de estos métodos en función de los criterios de diseño permite comprobar qué factores son los más determinantes, así como qué métodos son los más robustos con independencia de dichos criterios de diseño.

Por otra parte, y considerando la importancia de la gestión energética en las redes de sensores, se estudia el comportamiento de dos esquemas de transmisión para los estimadores propuestos: en el primero se limita el número de sensores que transmite su información (esquema con censura), mientras que en el segundo no existe ningún tipo de restricción (esquema sin censura).

MATLAB[®] es la herramienta informática utilizada para generar los escenarios necesarios y para realizar las simulaciones con las que se obtienen las medidas cuantitativas de la precisión del proceso de localización distribuida.

Finalmente, es necesario indicar la manera en la que se estructura esta memoria. En el segundo capítulo se realiza una revisión de la literatura sobre los conceptos e investigaciones más relevantes de las redes de sensores. Posteriormente, se presenta el marco teórico de la localización distribuida, desarrollando la formulación para cada método de estimación. En el capítulo cuarto se detallan los escenarios empleados en las simulaciones y se presentan los resultados obtenidos. Por último, se relatan las principales conclusiones obtenidas así como las posibles líneas de investigación futura.

Capítulo 2

Revisión de antecedentes

En este primer capítulo se realiza una revisión de la tecnología de las redes de sensores hasta el momento de realizar este Proyecto Fin de Carrera. Concretamente, se describen las principales características que definen este tipo de redes, así como las estrategias utilizadas para la gestión de la energía en las mismas, un aspecto crucial para esta tecnología. Además, se estudia cuál es el nivel óptimo de aplicación de las reglas de fusión en la red. Por último, se analizan dos de las aplicaciones más típicas de las redes de sensores distribuidas y las investigaciones más relevantes sobre ellas: la detección y la localización de agentes.

2.1. Visión general de las redes de sensores

Debido a las grandes oportunidades que ofrecen, las redes de sensores han sido clasificadas como una de las 21 tecnologías más importantes del siglo XXI [Chong y Kumar, 2003]. Los avances ocurridos en los últimos años en campos como las comunicaciones inalámbricas y la electrónica (micro-fabricación e integración) han permitido el desarrollo de sensores multifuncionales de bajo coste, bajo consumo y pequeño tamaño, que permiten el desarrollo de redes de sensores a un bajo precio.

Una red de sensores es un sistema persistente de computación compuesto por un gran número de nodos sensores que están densamente desplegados para medir un entorno físico específico. Cada uno de estos nodos sensores es un dispositivo electrónico autónomo capaz de capturar un determinado tipo de información física sobre su entorno inmediato (temperatura, intensidad de luz, humedad, ...). Además, es capaz de transformar esa medida de magnitud física en una señal eléctrica. Después, dependiendo del tipo de red que tengamos, el tratamiento de los datos se realiza de maneras diferentes. En modelos de redes de sensores tradicionales, centralizados, los datos tomados

por todos los sensores son retransmitidos al centro de procesamiento tal cual son adquiridos. Éste está habitualmente situado en los extremos de la red y allí los datos son procesados. Mientras, en los modelos distribuidos los nodos sensores son capaces de realizar un procesamiento de los datos de manera local (habitualmente con pérdidas de compresión), posteriormente envían éstos a otros sensores y en último lugar a un procesador conocido como centro de fusión. Este centro de fusión, a diferencia del caso centralizado, sólo tiene una información parcial comunicada por los sensores.

Generalmente, las redes centralizadas son redes de sensores con un número muy inferior de nodos que las redes distribuidas (varios órdenes menos), en las que la comunicación es realizada mediante enlaces punto a punto. Mientras, las redes distribuidas están formadas por un gran número de sensores de memoria, potencia y capacidad computacional más limitada, comunicados con otros pocos nodos locales mediante comunicación *broadcast*. En ocasiones, estos nodos no poseen identificadores globales por la sobrecarga que provoca en las transmisiones (en términos de tiempo, memoria y energía) al existir un número muy elevado de sensores [Zhao y Guibas, 2004].

Por una parte, cabe destacar que la utilización de una red centralizada produce una disminución del preciado ancho de banda. Por ejemplo si cada nodo sensor tiene datos que necesitan ser mandados a otro nodo el rendimiento de cada sensor disminuye (un factor $1/\sqrt{N_{\text{sensores}}}$), tendiendo a cero al aumentar el número de nodos en la red. Sin embargo, este esquema permite un enrutado, control de potencia y transmisión óptimos. Desde el punto de vista de la energía, la transmisión de los datos según son adquiridos a nodos distantes es un despilfarro de los recursos. No obstante, la disminución de ancho de banda puede ser paliada parcialmente mediante la introducción de nodos móviles si la aplicación tolera el retardo producido [Stojmenovic, 2005].

Por su parte, las redes distribuidas ofrecen ventajas únicas frente al modelo centralizado, ya que al estar compuestas por sensores densamente desplegados permiten mejorar la relación señal a ruido (SNR, *Signal to Noise Ratio*), gracias a la reducción de la distancia media entre el sensor y la fuente a medir. Además, se aumenta la eficiencia energética en las comunicaciones permitiendo una topología de red multi-salto [Stojmenovic, 2005]. Adicionalmente, la transmisión multi-salto permite agregación de información adicional relevante de otros sensores durante la transmisión. Sin embargo, las grandes ventajas que ofrecen las redes distribuidas son la mejora de la robustez (debido a la redundancia existente en la red distribuida, por el gran número de sensores desplegados, el sistema es más robusto ante fallos de nodos sensores o de enlaces), y mejora de la escalabilidad. Por otro lado, gracias al procesamiento local de los datos es posible eliminar la redundancia que representa la información proveniente de los nodos que adquieren medidas en regiones que se solapan, ya que la información de estos está casi siempre correlada. De esta

forma y mediante la agregación de datos en la red y la compresión local, los datos son reducidos antes de enviarlos a un nodo remoto.

La comunicación entre nodos sensores, se realiza normalmente de manera inalámbrica, a pesar de que la comunicación también puede ser cableada. Los más comunes son los sensores inalámbricos ya que, en general, permiten un despliegue más cercano al fenómeno de interés, posibilitan la movilidad, su coste de despliegue es más bajo al no utilizar cableado, y el tiempo de construcción de la red es menor, algo que para algunas aplicaciones es crítico (aplicaciones militares).

2.1.1. Características de las redes de sensores

Las redes de sensores están formadas por una gran cantidad de nodos sensores dispersos en el denominado *campo de sensores*, donde se encuentra la magnitud física a medir. Los sensores recogen los datos que son enviados a un *sink* o nodo pasarela que permite la conexión con otras redes externas. Este nodo pasarela puede permitir comunicarse con el usuario a través de Internet o vía satélite, tal y como se ve en la Figura 2.1 [Akyildiz et al., 2002].

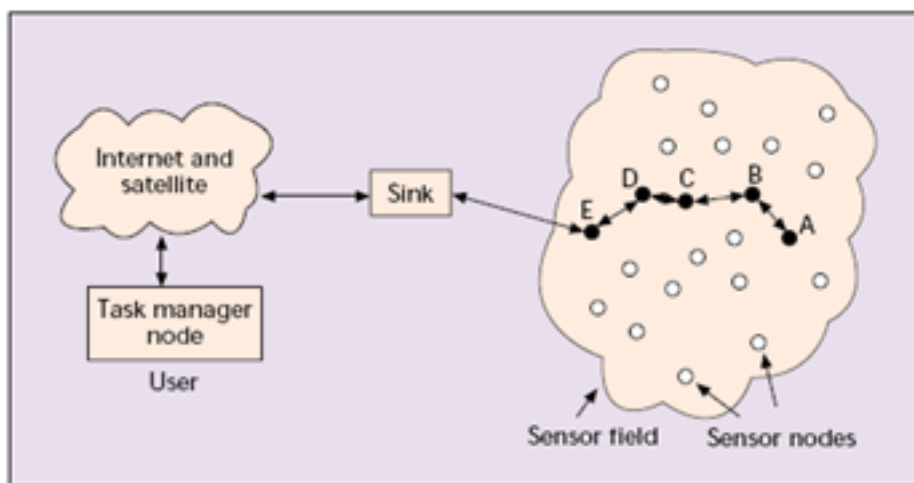


Figura 2.1: *Nodos sensores diseminados en el campo de sensores.*

Existen distintos tipos de arquitecturas para la organización de las redes de sensores. Entre ellas destacan: la red mallada donde los nodos se comunican con sus vecinos (Figura 2.2 (a) [Aakvaag y Frey, 2006]), la red en estrella en la que los nodos sensores sólo se comunican con el nodo pasarela (Figura 2.2 (b) [Aakvaag y Frey, 2006]), y las redes híbridas en las que los nodos se agrupan formando *clusters* o estrellas locales (Figura 2.2 (c) [Al-Ali et al., 2005]). Esta última es la topología más genérica de las redes distribuidas.

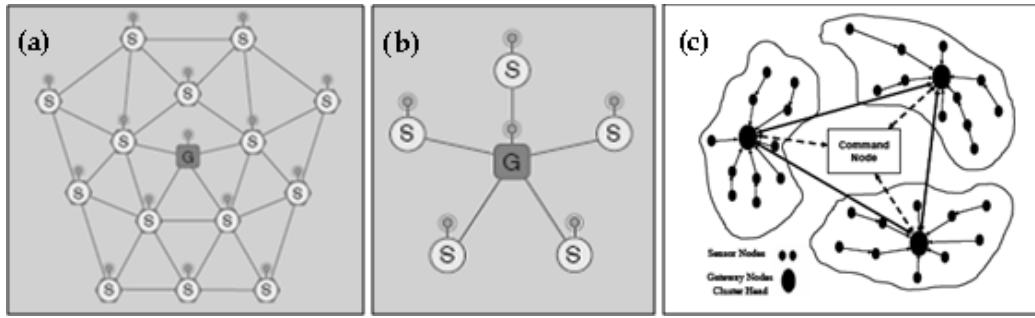


Figura 2.2: Red mallada (a), red en estrella (b) y red híbrida (c).

Desde el punto de vista operativo de la red, ésta se organiza en distintos niveles estructurados según una torre de protocolos tal y como se observa en la Figura 2.3 [Akyildiz et al., 2002]. Esta torre está formada por la capa física (encargada de la modulación y las técnicas de recepción y transmisión), la capa de enlace (que fundamentalmente se encarga del control de acceso al medio), la capa de red (cuyo objetivo es enrutar los datos dentro de la red), la capa de transporte (su principal misión es proporcionar comunicación con otras redes externas) y la capa de aplicación (donde se transmite la información de las aplicaciones que utilizan la red).

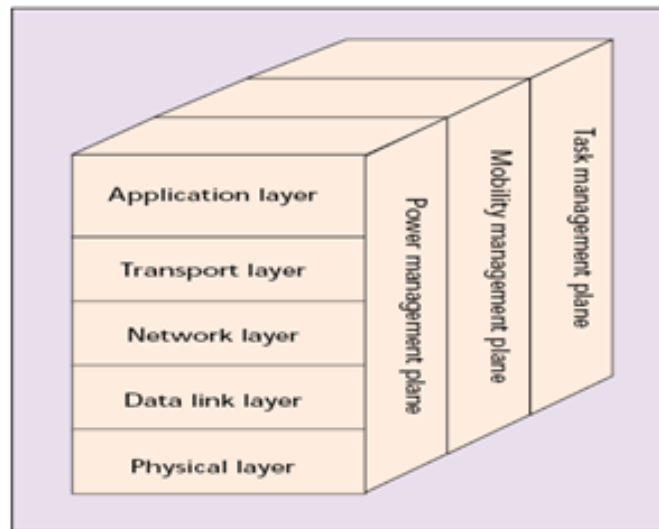


Figura 2.3: Torre de protocolos de las redes de sensores.

Además, dentro de la torre de protocolos existen tres planos de gestión que incluyen todos los niveles de la misma, tal y como se ve en la Figura 2.3 [Akyildiz et al., 2002]. El plano de gestión de energía determina cómo es utilizada la energía de los nodos sensores. Por su parte, el plano de gestión de tareas organiza la adquisición de datos de los sensores. Por último, el plano de movilidad registra y detecta el posible movimiento de los sensores.

A parte de la estructura física y lógica de la red, cabe destacar algunos de los factores más importantes que hay que tener en cuenta a la hora de diseñar y desplegar una red de sensores distribuida:

Tolerancia a fallos: Es posible que algunos de los sensores de la red puedan no comportarse correctamente debido a la falta de potencia, a interferencias producidas por el entorno o a daños físicos que hayan sufrido. Estos fallos de algunos de los elementos de la red, no deben influir en la realización de la tarea global de dicha red. Por eso se define la fiabilidad o tolerancia a fallos como la capacidad de mantener las funcionalidades de la red sin interrupción a pesar de que existan fallos en los nodos sensores. La fiabilidad R_k de los sensores puede ser modelada como una distribución de *Poisson*:

$$R_k(t) = e^{-\lambda_k t}, \quad (2.1)$$

donde λ_k es la tasa de fallos del nodo k .

Escalabilidad: El número de sensores desplegados para observar un fenómeno puede ser del orden de cientos o de miles y los esquemas deben poder trabajar con esta cantidad de nodos y aprovechar la alta densidad de éstos en la red para conseguir una mayor precisión.

Costes de producción: Debido a la gran cantidad de sensores utilizados en las redes de sensores, el coste de cada uno de éstos resulta crucial para la viabilidad de las aplicaciones. Dicho coste debe mantenerse bajo para que la implantación de la red pueda ser factible.

Restricciones *hardware*: Dependiendo de la aplicación, el tamaño de los sensores puede llegar a ser menor que un centímetro cúbico, y en él deben estar integrados todos los componentes del nodo sensor. La arquitectura de un nodo sensor suele estar compuesta por diferentes subsistemas (Figura 2.4 [[Akyildiz et al., 2002](#)]):

- *Subsistema de adquisición de datos*, que une al nodo con el mundo físico y está formado por un grupo de sensores y sus correspondientes conversores analógico-digital (ADC, *Analog to Digital Converter*). Es el encargado de obtener los parámetros físicos del entorno y convertirlos en señales digitales.
- *Subsistema de computación*, formado por un microprocesador o un microcontrolador y que generalmente lleva asociado una pequeña unidad de memoria.
- *Subsistema de comunicación*, encargado de unir al sensor con el resto de la red. Suele consistir en una radio de corto alcance para comunicaciones inalámbricas.

- *Subsistema de suministro de potencia*, es uno de los componentes más importantes ya que es el encargado de suministrar energía al nodo, y suele estar formado por la batería y el convertor DC-DC¹.
- *Otros subsistemas dependientes de la aplicación*, como es el caso del sistema de localización, para conocer la posición del sensor con precisión, el sistema de movilidad para el desplazamiento del sensor, y el sistema de generación de energía.

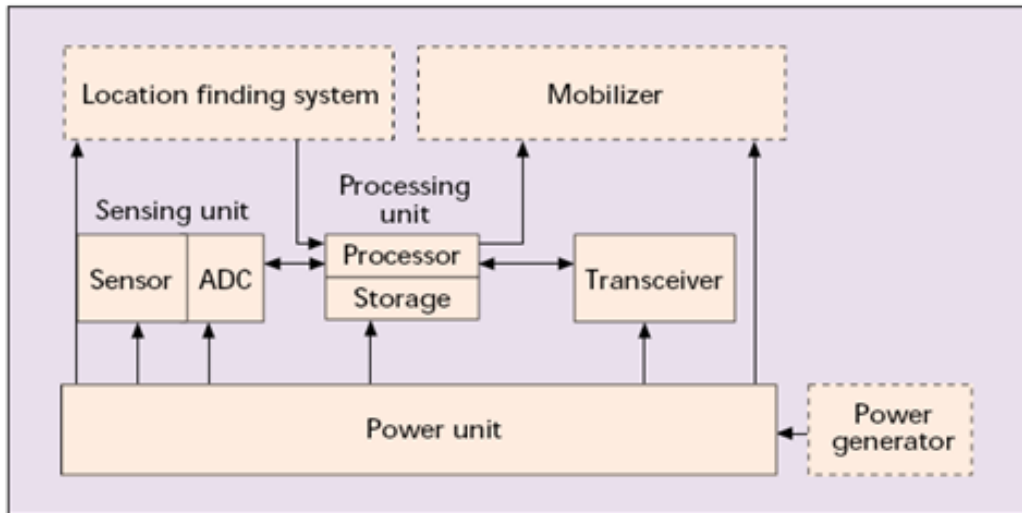


Figura 2.4: *Arquitectura de un nodo sensor.*

Topología de red: A causa del gran número de sensores que se colocan en un entorno es necesario un cuidadoso mantenimiento de la topología para el correcto funcionamiento de la red. En un primer lugar, hay que determinar la forma en la que se realiza el despliegue de los nodos sensores. Éste puede ser realizado de dos maneras: de una forma aleatoria, arrojándolos en el entorno que se quiere controlar mediante aviones o proyectiles, o realizarlo de una manera ordenada colocándolos uno a uno. Posteriormente, la topología de la red cambia debido a factores como la fiabilidad, cambios de posición de los sensores, cantidad de energía disponible en los mismos, ... lo que puede provoca que llegado un determinado momento sea necesario sustituir los nodos que no funcionan correctamente. Esto se suele realizar mediante un despliegue adicional de nuevos sensores, ya que suele ser la opción más factible debido al bajo coste de los nuevos sensores y al, generalmente, costoso acceso a los sensores anteriormente desplegados.

Entorno: Los sensores son desplegados muy cerca del fenómeno a observar o incluso dentro de él, y generalmente, en áreas de difícil acceso (campos

¹DC: *Direct Current*.

de batallas, edificios, océanos, montañas, ...) donde los sensores no pueden recibir ningún tipo de atención.

Modo de transmisión: La comunicación entre los nodos suele realizarse de forma inalámbrica, y el modo más común para estos enlaces es la radiofrecuencia. A pesar de esto, existen otros tipos de tecnologías para los enlaces como son los infrarrojos y enlaces ópticos, pero necesitan una línea de visión entre el transmisor y el receptor.

Consumo de potencia: Es uno de los aspectos más críticos de las redes de sensores. Los sensores son dispositivos equipados con una limitada fuente de energía, y en la mayoría de escenarios, el reemplazo de la fuente de alimentación de estos sensores resulta muy costoso o incluso imposible. Por lo tanto, el tiempo de vida del sensor está ligado al tiempo de vida de su batería, lo cual provoca que la gestión y la conservación de energía se conviertan en un factor clave.

Además de estas características para el diseño de una red de sensores, es necesario conocer los principales problemas y necesidades técnicas que tiene la red a nivel de funcionamiento. Estos problemas son gestionados mediante la pila de protocolos.

Descubrimiento de red: El conocimiento de los nodos vecinos por parte de un nodo sensor es fundamental para poder realizar el procesamiento colaborativo entre ellos. En redes cuyo despliegue es planeado la posición es conocida a priori. Sin embargo en otros casos, como el del despliegue aleatorio o en el caso de utilizar sensores móviles, la topología no es conocida o cambia constantemente. En estos casos se utilizan métodos de localización basados en GPS (*Global Positioning System*), o si no es factible por el alto coste de los mismos, se utilizan algoritmos de posicionamiento relativo [Chong y Kumar, 2003].

Control de red y enrutado: Debido a la naturaleza de los enlaces entre nodos sensores, éstos tienen poca fiabilidad, por eso deben ser el diseño del sistema y el *software* los que proporcionen la fiabilidad requerida. Ésta puede ser proporcionada mediante el despliegue de un adecuado número de sensores que aseguren una redundancia adecuada de enlaces. Por otra parte, y debido al gran número de sensores existentes, son necesarios protocolos que implementen algoritmos que encuentren las rutas más adecuadas para la comunicación, optimizando el consumo de energía para alargar la vida de la red.

Procesamiento colaborativo de información y de señal: Los nodos en una red de sensores colaboran para adquirir y procesar los datos que generan información útil a la aplicación. Dependiendo del grado de información compartida por los nodos y cómo éstos fusionan la información

proveniente de otros nodos se logran diferentes tipos de prestaciones. Cuanto mayor sea el número de nodos de los que se procesa su información, mejores prestaciones se obtienen, pero aumenta el gasto de energía. Igualmente, si se transmite a un nivel de procesado más bajo, las pérdidas de información son menores, pero se consume mayor ancho de banda. Son necesarios compromisos entre la precisión y los recursos disponibles.

Otra cuestión fundamental es la selección de las reglas de fusión, lo cual requiere otro compromiso entre la robustez y el rendimiento de la red, ya que reglas de fusión más simples son más robustas pero no son óptimas. También, es importante la utilización de muestreo espacial en las redes densamente pobladas, porque así se puede alargar aún más la vida operativa de la red [Chong y Kumar, 2003].

Tareas y peticiones: Un importante desafío en las redes de sensores, es el desarrollo de un lenguaje que permita realizar peticiones y ordenar tareas a la red de sensores, y de esta forma los usuarios puedan tener una interfaz simple para interactuar con la red.

Seguridad: Las redes de sensores trabajan en entornos hostiles, por lo que la seguridad es un factor clave en el desarrollo de la red para algunas aplicaciones como es el caso del despliegue detrás de las líneas enemigas. Las técnicas de red deben proveer a la red de un bajo retardo, hacerla segura y capaz de sobrevivir al entorno. Por eso es necesario protegerla de intrusiones, ataques hostiles y de posibles espías, así como de dotarla de una baja probabilidad de ser detectada.

2.1.2. Aplicaciones

El interés en sistemas de sensores distribuidos fue motivado por las aplicaciones militares de éstos [Chong y Kumar, 2003]. Su utilización en tareas de vigilancia, reconocimiento, detección, localización y seguimiento de amenazas, fueron alguna de sus primeras aplicaciones. Cabe destacar el impulso que proporcionaron a su desarrollo dos importantes programas de la DARPA (*Defense Advanced Research Projects Agency*) [DARPA, 2011]: DSN (*Distributed Sensor Networks*) y SensIT (*Sensor Information Technology*). El primero comenzó alrededor de 1980 e intentaba conocer si el modelo de *Arpanet* (el precursor de Internet) podía ser utilizado para las redes de sensores. Por su parte SensIT, que fue concluido en 2003, impulsó la investigación de nuevas arquitecturas de red para entornos altamente cambiantes (entornos militares), y del procesado de información en la red [Chong y Kumar, 2003].

No obstante, la evolución de la tecnología y la disponibilidad de sensores de bajo coste y de redes de comunicación han permitido el desarrollo de apli-

caciones potenciales en otros campos como la seguridad, el control del tráfico aéreo, video vigilancia, la automatización industrial y de manufacturación, monitorización ambiental, monitorización de construcciones y estructuras ... Algunos ejemplos de aplicaciones son:

- **Seguridad en infraestructuras:**

Las redes de sensores pueden ser usadas para la seguridad de edificios y construcciones críticas, como centros de comunicación o plantas de energía, para evitar ataques terroristas. Gracias a los sensores se puede obtener una detección temprana de amenazas de tipo biológicas, químicas o incluso nucleares.

- **Monitorización de hábitat y entorno:**

Es una aplicación típica de las redes de sensores, ya que las variables a monitorizar, están distribuidas en una gran región. En este caso los sensores permiten el estudio de cómo la vegetación responde a los cambios climáticos, o a las enfermedades. También es útil para el seguimiento de poblaciones de especies animales. Otra aplicación utilizada para la monitorización del entorno es el SIVAM (*System for the Vigilance of the Amazon*), promovido por el gobierno de Brasil para el control del tráfico de drogas y el tráfico aéreo en la región del Amazonas [Chong y Kumar, 2003].

- **Monitorización industrial:**

En la industria, las redes de sensores son utilizadas para monitorizar la salud de determinadas máquinas mediante la medición de vibraciones o de niveles de lubricación, insertando los sensores en zonas de acceso imposible para las personas. Algunas factorías han automatizado su producción y líneas de ensamblaje con redes de sensores que permiten un sofisticado control de calidad en tiempo real.

- **Control de tráfico:**

Las redes de sensores han sido utilizadas para la monitorización y el control del tráfico de vehículos, como es el caso del uso de sensores para detectar coches y controlar los semáforos en determinadas intersecciones o el uso de videocámaras para controlar determinados tramos de carreteras. Sin embargo, estos sensores y sus comunicaciones son bastante costosas y se utilizan en un número limitado de lugares. Una utilidad de las redes distribuidas de sensores de bajo coste puede ser la utilización de éstos en intersecciones para detectar y contabilizar vehículos y estimar su velocidad. Al ser sensores de precio bajo pueden ser utilizados en todas las intersecciones, y mediante la comunicación entre ellos pueden crear una imagen de la situación global del tráfico.

- **Aplicaciones en medicina:**

Los sensores pueden ser utilizados para monitorizar las constantes vitales a los pacientes del hospital y poder hacer un seguimiento de ellos. En caso de complicaciones, los sensores alertan a los trabajadores del hospital y les informan de la situación del paciente. Algunos proyectos están siendo desarrollados en este ámbito, como la monitorización del nivel de glucosa de pacientes diabéticos, o el desarrollo de una retina artificial [Stojmenovic, 2005].

2.2. Gestión de energía en redes de sensores

En la mayoría de aplicaciones es necesario que las redes de sensores tengan un largo tiempo de vida. Los sensores son dispositivos alimentados mediante baterías, y, debido a que el reemplazo de éstas en una red con cientos de sensores es una tarea muy costosa o incluso imposible de realizar, la gestión del consumo de energía se convierte en un factor crítico de la red.

Es necesario realizar una concienciación global energética, desarrollando estrategias de control a todos los niveles (componentes de sensores, protocolos, diseño de arquitecturas, ...) para preservar el limitado presupuesto energético. Ésta optimización energética es una tarea compleja, ya que las técnicas convencionales de bajo consumo de energía minimizan el consumo de los sensores de manera individual pero no se consigue maximizar el tiempo de vida de la red al completo.

2.2.1. Consideraciones de energía en los nodos sensores

En primer lugar, para la realización de esta estrategia de optimización energética, es necesario analizar las características de consumo de los componentes del nodo sensor (nivel *hardware*):

- **Subsistema de computación**

Dependiendo del modelo y las características del microcontrolador o microprocesador², el consumo de éste varía. Aquellos MCUs que tienen un rendimiento elevado (mayor velocidad de procesamiento) tienen además un consumo más elevado de energía. Por lo tanto, la elección de uno u otro debe estar en función de las prestaciones requeridas por la aplicación.

²De aquí en adelante, cada vez que se quiera hacer referencia a ellos se utilizará la abreviatura MCU (*Micro-Controller Unit*).

Adicionalmente, los MCUs disponen de distintos modos de operación que están caracterizados por distintos consumos de potencia. Estos modos suelen ser: activo, ocioso y apagado. También, es importante reseñar que las transiciones de un estado a otro provocan un aumento del retardo y del consumo de energía.

- **Subsistema de comunicación**

La comunicación inalámbrica generalmente es realizada vía radiofrecuencia, y permite comunicar al nodo con sus vecinos. Diversos factores afectan a las características de consumo de la radio del sensor como son: el tipo de modulación utilizada, la tasa de datos, la potencia de transmisión (determinada por la distancia de los sensores vecinos) y el ciclo de trabajo de la misma.

Al igual que el MCU, la radio dispone de diversos modos de operación (transmisor, receptor, ocioso y apagado), de los cuales hay que destacar que en la mayor parte de los casos, trabajar en el modo ocioso consume casi tanta energía como en el modo receptor, consecuentemente, para ahorrar energía deberemos apagar la radio cuando sea posible.

Además, se ha comprobado que para distancias extremadamente pequeñas el consumo en modo receptor es mayor que en modo transmisor, por lo que los protocolos que consideran la potencia usada en modo receptor como despreciable no son útiles. También, es destacable que las transiciones entre modos provocan una importante disipación de energía, así como que el gasto de encendido es bastante significativo [Raghunathan et al., 2002].

- **Subsistema de adquisición de datos**

Como se explicó anteriormente, los sensores son transductores que transforman una medida física en una señal eléctrica. Generalmente se clasifican en pasivos, cuyo consumo de energía es despreciable frente a otros componentes del nodo, y activos, que pueden ser grandes consumidores de potencia.

- **Subsistema de suministro de potencia**

Las baterías son una pieza vital para el sensor ya que son las que proporcionan energía al dispositivo. El *efecto de capacidad nominal* es el factor que más afecta a la duración de la batería. Éste ocurre si se utiliza una corriente mayor que la corriente nominal indicada por el fabricante. Esto provoca que la velocidad con la que los ingredientes activos se difunden en el electrolito sea menor que la velocidad con la que son consumidos en los electrodos, provocando la muerte de la batería cuando todavía existen elementos activos en ella. Para evitarlo, la corriente debe ser estrictamente controlada.

Otra opción que permite recuperar una parte de la capacidad perdida de la batería es el denominado *efecto de relajación*, el cuál se consigue mediante la utilización de bajos valores de corriente de manera frecuente.

Por su parte, los conversores DC-DC proporcionan una tensión constante al nodo, y dependiendo del factor de eficiencia que tengan, pueden disipar parte de la energía disponible.

Una vez conocido el consumo de los elementos *hardware* del nodo sensor, se pueden desarrollar estrategias que permitan una minimización de éste. Algunas de las principales técnicas utilizadas son:

DPM (*Dinamyc Power Management*) Es un esquema de gestión de potencia en el cual varias partes del nodo sensor son apagadas o llevadas a un estado de baja consumo de potencia si ningún evento de interés ocurre. La principal cuestión es la decisión de cuando llevar a cabo los cambios de estado, debido al diferente consumo de éstos, y de que las transiciones tienen un gasto de potencia no despreciable. El inconveniente que aparece es el aumento de retardo en el sistema.

DVS (*Dinamic Voltage Scaling*) Esta técnica está basada en el hecho de que existe una carga computacional variable en el tiempo, con lo cual el voltaje proporcionado al procesador y la frecuencia de operación de éste puede adaptarse dinámicamente a la necesidad de procesamiento en cada momento. El DVS ha demostrado una mayor eficiencia energética que esquemas basados en el apagado del procesador [Raghunathan et al., 2002]. Al igual que en el caso del DPM, el uso de esta técnica provoca un aumento del retardo.

Sistemas operativos eficientes energéticamente La utilización de un sistema operativo eficiente es un hecho fundamental, ya que éste tiene un conocimiento global de los requerimientos de las aplicaciones y puede controlar los elementos *hardware*. El núcleo del sistema operativo es el organizador de tareas, que puede permitir alargar la vida del sensor con un diseño eficiente.

Gestión del sistema de radio El consumo de potencia del sistema radio en comunicaciones inalámbricas es el mayor que se realiza durante las operaciones del sistema, por eso la gestión de éste es extremadamente importante. Desafortunadamente, es un problema muy complejo al no ser posible realizar una estrategia dinámica como el caso del DPM o del DVS, ya que los retrasos en el sistema radio provocan un aumento de la energía consumida [Raghunathan et al., 2002].

La energía consumida por el sistema radio depende por una parte de la circuitería electrónica, y por otra de la distancia de transmisión y de los parámetros de modulación.

En general, la potencia transmitida a una distancia d decae de manera proporcional a d^n , donde el factor n es cercano a 4 para antenas y canales cercanos al suelo, como suele ser el caso de las redes de sensores.

Por otra parte, la elección del esquema de modulación resulta crítica. Aquellos que utilizan modulaciones M -arias reducen el tiempo de transmisión, ya que envían varios bit por símbolo, pero aumentan el consumo de potencia debido a la compleja circuitería necesaria. Por eso es necesario alcanzar un compromiso entre rendimiento y consumo de energía. Una buena técnica es el denominado *escalado de modulación*, que adapta dinámicamente el nivel de modulación a la carga de tráfico instantánea, reduciendo el consumo general de energía [Raghunathan et al., 2002]. Otras alternativas que se están investigando son la utilización de *espectro ensanchado por secuencia directa* o de UWB (*Ultra Wideband*) que permiten mejorar la eficiencia con transmisiones de baja potencia [Akyildiz et al., 2002].

Una medida útil para el ahorro de potencia es apagar la radio cuando sea posible, ya que en el modo ocioso se consume casi tanta energía como en el modo receptor o transmisor. No obstante, es importante tener en cuenta el alto consumo de energía que se produce en el encendido del sistema radio. Por eso, para que el apagado de la radio sea efectivo, el tiempo en este modo debe ser mayor que un determinado umbral [Akyildiz et al., 2002]. Además, para minimizar el efecto del gasto fijo que supone el encendido de la radio es beneficioso utilizar tamaños de paquetes lo más grandes posibles, así se amortizar éste sobre una mayor cantidad de bits. Como contrapartida, hay que destacar que al aumentar el tamaño de los paquetes, aumenta el retardo.

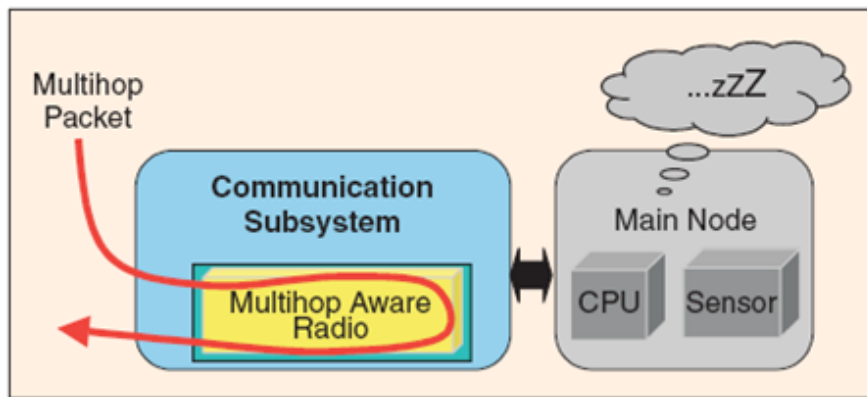


Figura 2.5: Arquitectura para el reenvío eficiente de paquetes.

Otra estrategia que repercute en una disminución del consumo de energía es la utilización de un *hardware* inteligente para el sistema radio que permita distinguir los paquetes recibidos. Aquellos que tengan como destino final el nodo serán entregados al sistema de computación, mientras que aquellos que haya que retransmitir a otros nodos serán enviados directamente, permitiendo al sistema de computación permanecer en un modo inactivo, tal y como se observa en la Figura 2.5 [Raghunathan et al., 2002].

2.2.2. Consideraciones de energía globales en la red

Para aumentar el tiempo de vida de la red, no sólo es necesario desarrollar estrategias que mejoren el rendimiento energético de los sensores a nivel individual, sino que también es necesario utilizar protocolos y algoritmos que permitan comunicaciones eficientes y una optimización de la energía de manera global. Algunos de estos esquemas se describen a continuación, agrupados según en el nivel lógico donde se aplican:

- **Nivel de enlace:**

El nivel de enlace es el encargado del acceso al medio y del control de errores. Los protocolos de acceso al medio diseñados para otras redes no son aplicables a las redes de sensores, ya que no priman la importancia de la conservación de energía. Algunos protocolos de acceso diseñados para lograr la eficiencia energética son:

- SMACS³: Este protocolo ([Sohrabi et al., 2000]) permite el acceso al medio mediante ranuras de tiempo. El ahorro de potencia se produce ya que los sensores sólo se “despiertan” en las ranuras de tiempo que se les asignan, mientras que apagan la radio el resto del tiempo.
- Acceso al medio basado en CSMA⁴: A diferencia del CSMA tradicional, el esquema presentado en [Woo y Culler, 2001] soporta tráfico variable, altamente correlado y periódico. Se utilizan períodos constantes de escucha del canal para que sea eficiente energéticamente.
- Híbrido TDMA-FDMA⁵: Es descrito en [Shih et al., 2001], y se fundamenta en que para conseguir mayor eficiencia energética, el esquema TDMA es usado si el transmisor consume más potencia, o si es el receptor el que utiliza más energía se inclina hacia FDMA.

³SMACS: *Self-Organizing Medium Access Control for Sensor Networks*.

⁴CSMA: *Carrier Sense Multiple Access*.

⁵TDMA-FDMA: *Time Division Multiple Access-Frequency Division Multiple Access*.

Además, si se utilizan esquemas simples de corrección de errores, se consigue mantener la tasa de error de bit (BER, *Bit Error Ratio*) requerida por el usuario, mientras se reduce el consumo de energía. Esto es posible ya que los esquemas de control de errores reducen la potencia requerida para transmitir la información a cambio de un mayor procesamiento de los paquetes. Dicho procesamiento adicional también debe ser tenido en cuenta, porque provoca un consumo energético adicional en el proceso de codificación y decodificación. Además, con estos esquemas se consigue que se minimicen el número de retransmisiones que se realizan, disminuyendo el consumo de energía.

- **Nivel de red:**

Uno de los aspectos más importantes para las redes de sensores es la elección de rutas eficientes energéticamente entre un emisor y un destinatario. Para ello, protocolos de enrutamiento multi-salto son utilizados en redes inalámbricas. Sin embargo, no siempre la elección del camino que minimiza el consumo total de energía consigue maximizar el tiempo de vida de la red. Si un camino de bajo consumo de energía es utilizado constantemente, se minimiza el consumo de potencia, pero los nodos de esa ruta agotan sus baterías, provocando que la conectividad de la red quede comprometida. Es preferible repartir la carga más uniformemente por toda la red. Algunos protocolos que realizan esto son:

- GAF⁶: Identifica los nodos equivalentes respecto a la cantidad de tráfico que soportan y a la localización geográfica, de tal forma que pueden reemplazarse uno a otro de manera transparente para la topología de enrutado. Periódicamente, estos nodos se alternan para asegurar una distribución de consumo justa. Es descrito en [Xu et al., 2001].
- Span: El algoritmo *Span* es presentado en [Chen et al., 2001], y en él una cantidad limitada de nodos son elegidos para transportar la mayor parte del tráfico, mientras otros pasan al estado de dormidos. Periódicamente, los papeles se intercambian.
- SAR⁷: Este protocolo, desarrollado en [Sohrabi et al., 2000], crea múltiples árboles de nodos donde la raíz de cada árbol está a un salto de la estación base. Estos árboles se crean evitando nodos con baja calidad de servicio (QoS, *Quality of Service*) y reservas de energía. Al acabar este proceso la mayoría de los nodos pertenecen a múltiples árboles. De esta forma, si un nodo quiere transmitir, elige un árbol en función de los recursos de energía y de la QoS acumulada de éste.

⁶GAF: *Geographical Adaptive Fidelity*.

⁷SAR: *Secuencial Assignment Routing*.

Otras mejoras energéticas a nivel de red son posibles, como las que se logran con la agregación de datos. Dicho método consiste en la combinación no coherente (sin sincronización) de la información de nodos cercanos. También es conocida como fusión, y permite una disminución de la cantidad de tráfico por la red. Esto es posible gracias a que dicha información está altamente correlada, al cubrir los sensores zonas solapadas, y mediante la combinación de esta información redundante, el tamaño de los datos a transmitir disminuye. La elección de los nodos que realizan esta tarea se realiza con diferentes técnicas como el agrupamiento. Un ejemplo de protocolo que implementa esta función es:

- o *LECH*⁸: Es un protocolo basado en agrupamiento que minimiza la disipación de energía ([Heinzelman et al., 2000]). Consta de dos fases, en la primera de entre los nodos de la red se eligen los denominados centroides de manera aleatoria, y el resto de los nodos se asocian al centroide más cercano a ellos en función de la fuerza de su señal. En la segunda fase los nodos adquieren datos y los transmiten a los centroides que se encargan de agregar dichos datos para mandarlos a la estación base. Después de un período de tiempo, se vuelven a elegir nuevos centroides.

Por último, cabe destacar la existencia de otro tipo de técnicas que permiten alargar la duración de vida operativa de la red a cambio de una disminución en la precisión de las aplicaciones. Estas técnicas son conocidas como *esquemas censurados*, en los cuales sólo se utilizan un muestreo de nodos para utilizar su información. Esto permite una reducción de la complejidad computacional, así como de las necesidades de comunicación.

La elección de estos nodos puede realizarse según diferentes criterios. Uno de estos es la elección aleatoria por parte de los nodos de cuando transmitir y de cuando realizar medidas, que es útil en escenarios de detección ya que la llegada de objetivos no sigue ninguna distribución particular [Appadwedula et al., 2005]. Otros esquemas censurados basan la decisión de transmitir de un nodo en el ratio de verosimilitud de sus medidas; si este está dentro de unos límites el nodo transmite [Rago et al., 1996]. También se han estudiado escenarios donde el centro de fusión es quien decide que nodos son los que transmiten [Tay et al., 2007]. Del mismo modo, otro criterio utilizado en sistemas de detección es aquel en el sólo transmiten los nodos que, después de efectuar la medida y realizar una decisión a nivel local, obtienen como resultado una decisión positiva [Lázaro et al., 2009].

⁸LECH: *Low-Energy Adaptive Clustering Hierarchy*.

2.3. Reglas de fusión óptimas: nivel global o nivel local

Como se ha descrito anteriormente, la fusión es el proceso mediante el cual los datos obtenidos por los sensores son combinados. Esta tarea se realiza mediante un conjunto de métodos o reglas automáticas con el que se obtiene información significativa. Según las investigaciones desarrolladas, estas reglas pueden ser agrupadas en [Stojmenovic, 2005]:

1. Operaciones básicas.

La mayoría de las operaciones básicas para fusión de datos incluyen:

- *COUNT*: recuento del número de datos obtenidos por los sensores.
- *MIN*: valor mínimo de los datos obtenidos por los sensores.
- *MAX*: valor máximo de los datos obtenidos por los sensores.
- *SUM*: suma de los datos obtenidos por los sensores.
- *AVERAGE*: valor promedio de los datos obtenidos por los sensores.

2. Supresión de redundancia.

Es equivalente a realizar una compresión de los datos. La alta redundancia aparece en redes de sensores debido a que la información de nodos sensores vecinos está altamente correlada, al cubrir éstas zonas solapadas.

3. Estimación de un parámetro de sistema.

Basándose en la observación de datos de varios sensores, la función de fusión permite resolver un problema de optimización para minimizar el error de estimación de un parámetro del sistema.

Sin embargo, la situación del centro de fusión dentro de la red es un problema que ha de ser determinado. Existen modelos en los que el centro de fusión realiza una combinación de datos a nivel global (con la información de todos los nodos de la red), mientras que en otros, la situación de los centros de fusión es a nivel local, abarcando el procesamiento unos pocos nodos, para después realizar un procesamiento global de la información de los centros de fusión locales (Figura 2.6, [Yamamoto y Ohtsuki, 2005]).

De los estudios realizados, se puede concluir que la utilización de fusión a nivel local reduce la degradación causada por ruido en las observaciones, ruido en el canal y por desvanecimientos. Además, si los nodos sensores realizan una decisión sobre las observaciones tomadas, y alguno comete un error

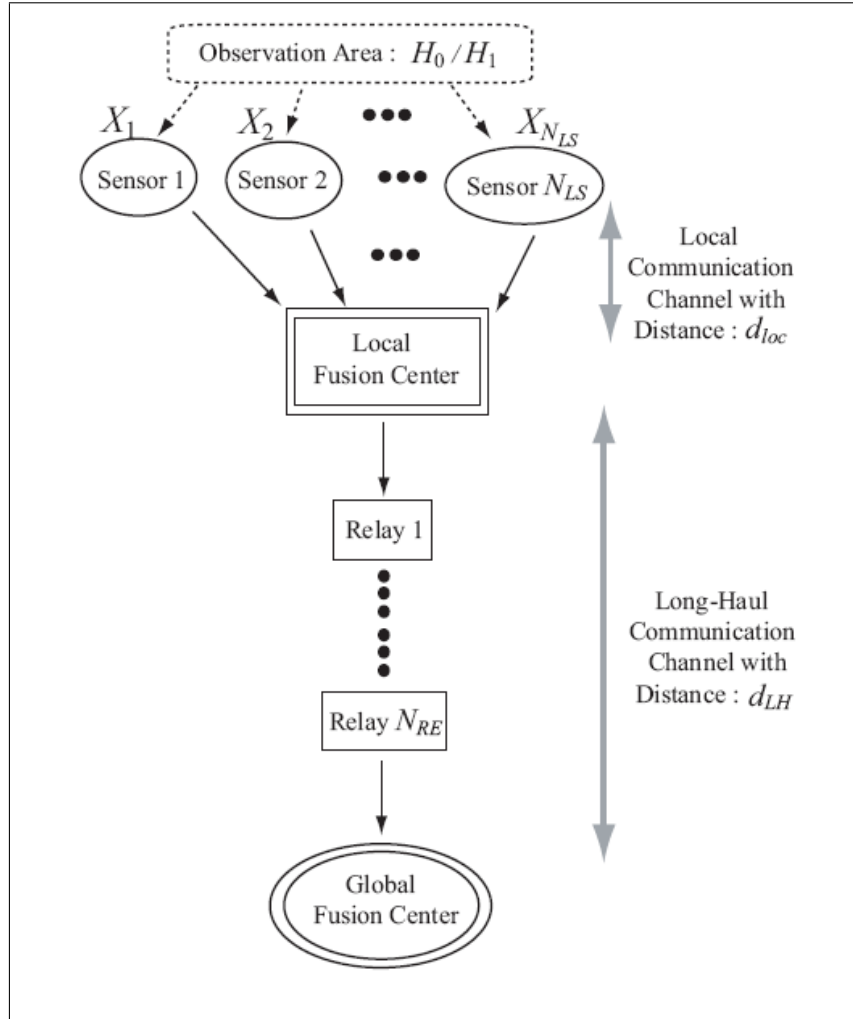


Figura 2.6: *Modelo de red de sensores con fusión local.*

en dicha decisión, se consigue que la probabilidad de que el centro de fusión local cometa un error en la decisión del evento sea pequeña. Por eso, la probabilidad de que un centro de fusión local transmita una decisión equivocada es pequeña. Esto permite concluir que la utilización de esquemas con fusión local permite obtener mayor fiabilidad frente a los esquemas con fusión global [Yamamoto y Ohtsuki, 2005].

Otra ventaja que ofrecen los sistemas con centros de fusión locales es la mejora de la eficiencia energética respecto a los de sólo fusión global. Este beneficio se produce fundamentalmente por la reducción del tamaño de paquetes que deben ser transmitidos por la red y consecuentemente del mejor uso del ancho de banda y de la energía. Estos beneficios son más altos cuanto mayor es el tamaño de la red. Además, el número de saltos por bit que se realizan en la red también disminuye ($O(N^{3/2})$ con fusión local y $O(n)$ con fusión global) [Stojmenovic, 2005].

Un ejemplo explicativo aparece en la Figura 2.7 ([Stojmenovic, 2005]). En (a) la *Fuente 1* elige la ruta más corta para mandar sus datos, enviando la información a través del *Nodo B*, mientras que en (b), la información se manda al *Nodo C* que es un centro de fusión. Como resultado un número menor de paquetes es enviado por la red con fusión local.

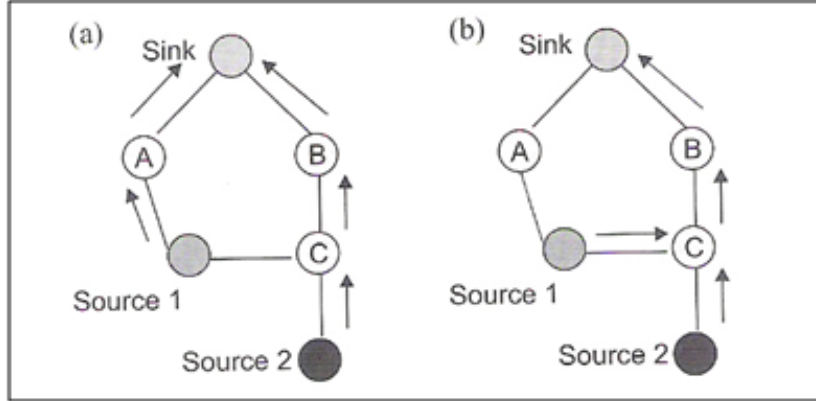


Figura 2.7: *Fusión global (a) y fusión local (b).*

Un problema que aparece en los esquemas de fusión, es estimar cuál es la localización más adecuada para los centros de fusión. Múltiples estudios han desarrollado este tema, como es el caso de [Petrovic et al., 2003], donde se propone el protocolo de enrutamiento *Data Funneling*, que integra técnicas de fusión de datos. Su idea se basa en la creación de una subred basada en costes con forma de embudo para llevar los datos desde las fuentes al nodo pasarela. El algoritmo determina cuáles de los nodos de la red de sensores deben ser centros de fusión y qué camino han de seguir los datos por la red.

2.4. Detección distribuida de objetivos

La detección es el proceso mediante el cual se descubre la existencia de un fenómeno físico. El estudio de detección distribuida con sensores ha centrado la atención de los investigadores en las últimas dos décadas.

En comparación con los sistemas de detección centralizados, donde los datos son enviados a los centros de fusión sin ningún procesamiento, el rendimiento de los sistemas distribuidos es generalmente inferior debido a la pérdida de información en el procesamiento local. No obstante, la detección descentralizada es más práctica ya que reduce los requerimientos de comunicación a causa de que el procesamiento de los datos es compartido por un diferente número de procesadores. Por el contrario los problemas del modelo descentralizado son más complejos, y la mayoría se resuelven de manera numérica y no analítica [Polychronopoulos y Tsitiklis, 1990].

El problema de la detección distribuida puede describirse de manera genérica como un escenario en el cual los sensores de la red toman observaciones sobre el estado del entorno y transmiten un resumen de su información al centro de fusión. Dicho resumen es una evaluación de la observación en función de una regla de decisión local. Esto provoca que el sensor envíe como resultado un valor único de un conjunto finito de valores. El centro de fusión, a su vez, decide cual de las posibles hipótesis es la hipótesis verdadera aplicando una regla de decisión a los mensajes enviados por los sensores. Por lo tanto, el objetivo principal en detección distribuida consiste en la elección de las reglas de decisión de los nodos y del centro de fusión que minimicen la probabilidad de error en la decisión del centro de fusión.

Este problema y sus múltiples variantes han sido objeto de un gran número de investigaciones. Por ejemplo, en 1986, [Chair y Varshney, 1986] determina, para el caso de hipótesis binarias (detección o no detección), la regla de decisión óptima en el centro de fusión cuando la regla de decisión local es conocida.

Otros estudios como [Viswanathan y Varshney, 1997], desarrollan el caso de hipótesis binarias para dos tipos de topologías (serie y paralelo) y dos criterios de optimización (*Neyman-Pearson*, que minimiza la probabilidad de pérdida para una restricción de la probabilidad de falsa alarma, y el *riesgo Bayesiano*, que minimiza la probabilidad de error media). Se concluye que para observaciones de los sensores con independencia condicional estadística, los umbrales basados en medidas del ratio de verosimilitud son los óptimos para todos los casos, tanto en el centro de fusión como en los sensores. Sin embargo, los autores destacan la alta complejidad computacional necesaria para hallar los valores de los umbrales.

Uno de los casos más estudiados es de la detección binaria con mensajes binarios. En él, el número de hipótesis posibles es 2, al igual que los tipos de mensajes enviados por los sensores. Tal y como describe [Tsitsiklis, 1988] cualquier conjunto óptimo de reglas de decisión, para este caso, tiene la siguiente estructura: los sensores y el centro de fusión utilizan como medida el ratio de verosimilitud para evaluar los respectivos mensajes y compararlos con un determinado umbral. Si no existe independencia condicional de las observaciones de los sensores, el problema resulta intratable. Por eso, es importante que se cumpla la condición de independencia condicional estadística. En este caso el valor óptimo del umbral de cada sensor puede ser obtenido encontrando la solución mínima de un conjunto de ecuaciones algebraicas acopladas. Sin embargo, y aunque las observaciones de cada sensor estén idénticamente distribuidas, todos los sensores no tienen el mismo umbral. Esto provoca que cuando el número de sensores de la red es muy alto la carga computacional sea inviable. Como solución se demuestra que si se utilizan reglas de decisión locales idénticas para todos los nodos, es sencillo

computacionalmente hallar un umbral óptimo, y la solución global es asintóticamente óptima, es decir, óptima si el número de sensores de la red tiende a infinito.

El resultado obtenido anteriormente, fue extendido en el estudio de 2004 [Chamberland y Veeravalli, 2004], el cual demostró que en redes sujetas a restricciones de potencia, y donde la comunicación entre cada sensor y el centro de fusión es degradada por la aparición de ruido aditivo, el uso de nodos sensores idénticos (que empleen el mismo esquema de transmisión) es asintóticamente óptimo.

Existen investigaciones que abarcan el caso más general de detección: M hipótesis y decisiones de sensores multibit [Polychronopoulos y Tsitiklis, 1990]. Con un problema idealizado, se obtienen las reglas asintóticamente óptimas y se concluye que este caso puede verse como una colección de $M(M - 1)/2$ problemas de hipótesis binarias.

Por otra parte, trabajos como [Blum et al., 1997] desarrollan diferentes criterios de optimización para la detección en redes distribuidas. El primer criterio que se describe es la detección de señales distribuidas localmente óptima (LO), que permite una detección óptima en condiciones de desconocimiento de la fuerza de la señal (o de señales débiles) debido a la presencia de ruido no gaussiano. Otro criterio que se desarrolla es la detección no paramétrica donde la distribución de las observaciones de la señal y el ruido no se ajustan a ningún modelo definido por un número finito de parámetros. Especialmente se centra en el criterio CFAR (*Constant False Alarm Rate*), cuyo objetivo es determinar los umbrales de manera dinámica para que se mantenga una probabilidad de falsa alarma constante. Por último, se desarrolla la detección distribuida mediante esquemas secuenciales. Éstos se distinguen del resto de casos ya que, en lugar de utilizar un número fijo de observaciones, utilizan un número aleatorio de éstas que depende de las propias observaciones. Dichas observaciones son tomadas de manera secuencial y la decisión de cuando parar de tomar observaciones es una parte del procedimiento de detección. Con esto se permite la posibilidad de realizar decisiones finales tan pronto como la cantidad de datos es suficiente para cumplir unas características de fiabilidad dadas, parando el proceso de adquisición y dando un resultado. Es posible usarlo tanto a nivel de sensores como de centros de fusión. En cada caso del estudio, se describen las estrategias óptimas.

Otro estudio digno de mención es [Dasarathy, 1994], en el cual el autor desarrolla un proceso recursivo para el caso en el que el centro de fusión no pueda decidirse por una de las hipótesis en un instante dado.

Cabe destacar otro aspecto que ha sido desarrollado en diferentes estudios, que es la comparación entre la utilización de redes con muchos sensores baratos y de bajas prestaciones o de redes con un número menor de sensores de altas prestaciones pero de un precio mayor. Las conclusiones obtenidas

indican que mientras que la densidad de sensores permita mantener la condición de independencia estadística de las observaciones, las redes con sensores de bajo coste son más precisas [Tsitsiklis, 1988]. Un tema similar a éste es estudiado en [Marano et al., 2006], donde los autores investigan si la mejor opción es la utilización de unos pocos sensores cuyas observaciones son cuantificados de manera muy precisa (muchos niveles), o la utilización de muchos sensores con una cuantificación más tosca (pocos niveles). El resultado indica que la elección óptima depende de la relación señal a ruido requerida.

2.5. Localización distribuida de objetivos

La localización de objetivos distribuida en redes de sensores puede definirse como la estimación de la situación de un fenómeno físico mediante un conjunto de medidas. Ésta es una de las tareas más importantes que se pueden realizar con una red de sensores inalámbrica, y es básica para el seguimiento preciso de objetivos y para análisis de movimiento de nivel superior. Cabe destacar el gran número de aplicaciones en las que se precisa la localización de un cierto objeto o fenómeno. En procesamiento de señales de sonar, *arrays* de hidrófonos son utilizados para la localización de fuentes acústicas bajo el agua [Tolstory, 1993]. Otro ejemplo de utilización es la estimación de localizaciones de vehículos, con redes de sensores en campo abierto, mediante el uso de señales acústicas [Reed et al., 1999].

El proceso de localización es realizado en dos fases. Primero se ejecuta la adquisición de medidas acústicas, electromagnéticas o térmicas emitidas por una fuente u objetivo, en cada uno de los sensores que conforman la red. Posteriormente el análisis colaborativo de los datos recogidos (uso de reglas de fusión) permite realizar la estimación de la localización de la fuente.

Para realizar esta tarea, diversas técnicas han sido desarrolladas dependiendo del tipo de información física disponible por los nodos sensores:

- **Diferencia del tiempo de llegada (TDOA, *Time Difference Of Arrival*)**

Esta técnica es aplicada para señales de banda ancha, y en ella se utiliza la diferencia del tiempo de llegada de la señal de la fuente a cada sensor para realizar una estimación de la posición del objetivo. Aunque es un método con el que se obtienen buenos resultados, se necesita una precisa sincronización entre los sensores de la red.

- **Dirección de llegada (DOA, *Direction Of Arrival*)**

Esta técnica es aplicable cuando la fuente emite una señal coherente y de banda estrecha. Un grupo de nodos o *array* de sensores toman

muestras de la señal de la fuente, y mediante el análisis de las diferencias de fase de las señales medidas en estos sensores (mediante técnicas de conformación de haz), se realiza una estimación de la dirección de llegada que es transmitida a un centro de fusión para estimar la localización de la fuente. Para este tipo de técnica es necesario el uso de sensores con funcionalidades y características de medida adicionales.

- **Intensidad de señal (RSS, *Received Signal Strength*)**

Esta técnica utiliza las propiedades de atenuación de la señal de radio para modelar la distancia entre el nodo y la fuente como una función indicadora de la fuerza de la señal recibida (RSS). Los sistemas que se basan en el RSS como parámetro de entrada tienden a ser muy precisos en distancias cortas si se emplea un extenso post-procesamiento, pero son imprecisos cuando las distancias son relativamente grandes. En distancias cortas, las estimaciones obtienen errores de aproximadamente un 10 % en una distancia máxima de 20 metros [García, 2008]. Este hecho implica que son necesarias redes de sensores densamente pobladas.

Esta técnica, en comparación con el TDOA y la DOA, ofrece la ventaja de poder utilizar sensores simples y baratos, ya que la adquisición de la RSS se realiza fácilmente. Sin embargo, la incertidumbre de la propagación de las ondas de radio impone problemas como el desvanecimiento de múltiples trayectorias (*multipath fading*), sombras (*shadowing*) y pérdidas de trayectorias (*path loss*), cuyos efectos disminuyen la precisión de las estimaciones.

Muchos estudios han desarrollado el problema de la localización mediante DOA. Éste es el caso de [Kaplan et al., 2001] que desarrolla una estimación de la DOA mediante sensores acústicos que es enviada al centro de fusión. En éste, y mediante cuatro variantes del criterio de máxima verosimilitud (ML, *Maximum Likelihood*), se determina la estimación de la posición de la fuente. El estudio concluye que para niveles de SNR altos hay que considerar factores de retardo de tiempo. También existen múltiples desarrollos para el caso de localización de fuentes acústicas mediante TDOA; [Yao et al., 1998] es uno de ellos.

Para los métodos basados en la intensidad de señal cabe destacar que la localización, cuando se asume que sólo un objetivo está presente en el campo de sensores, puede simplificarse mediante la resolución de un problema de mínimos cuadrados como es el caso de [Li y Hu, 2003]. Se demuestra que esta estimación es bastante sensible a los mínimos locales y a los puntos de ensilladura. Sin embargo, en este estudio, son necesarias medidas analógicas adquiridas por los sensores para realizar la estimación de la fuente. Esta situación también aparece en otros trabajos diferentes, como [Sheng y Hu, 2005],

que utiliza otro criterio para la estimación, el de máxima verosimilitud. El hecho de utilizar medidas analógicas resulta muy poco eficiente para la red de sensores, debido a los limitados recursos de los que dispone (energía y ancho de banda). Por eso, es fundamental limitar las comunicaciones dentro de la red transmitiendo datos binarios o cuantificados desde los nodos sensores locales a los centros de fusión.

Algunas investigaciones profundizan en estos temas. Una de ellas es la que aparece en [Artés-Rodríguez et al., 2004], donde se estudian redes con nodos sensores binarios, es decir, que realizan una decisión dura indicando si el objetivo es detectado o no. En él, se comparan las prestaciones de dos reglas de fusión diferentes: la estimación basada en la máxima verosimilitud (ML), y la estimación basada en la minimización del riesgo empírico (ERM, *Empirical Risk Minimization*). Para la estimación se propone una búsqueda del máximo (ML) o mínimo (ERM) por descenso de gradiente. El estudio se realiza sobre dos escenarios; en el primero la información de todos los nodos está disponible, y en el segundo se implementa un esquema censurado, que permite un ahorro de energía, en el cuál sólo las detecciones positivas están disponibles. Concluye que el ML es más preciso para escenarios sin censura, mientras el ERM es mejor para el caso censurado.

El uso de información cuantificada se desarrolla en [Niu y Varshney, 2006] y [Kim y Ortega, 2006]. En el primero, en un escenario idealizado (sin tener en cuenta multitrayecto o desvanecimientos), en el que se asume ruido aditivo gaussiano y desconocimiento de la potencia con la que transmite la fuente, se desarrolla un estimador basado en el criterio de máxima verosimilitud. Sus prestaciones son comparadas con otros estimadores heurísticos basados en promedios ponderados de las medidas de los sensores. Se comprueba que el estimador ML es mucho más preciso incluso con bajo número de niveles de cuantificación. Además se concluye que a mayor número de bits de cuantificación, el algoritmo converge más rápidamente al límite inferior de Cramer-Rao (que es utilizado para conocer la precisión del estimador). Por otra parte, se intenta mejorar la precisión de la estimación mediante el diseño de los umbrales de cuantificación óptimos. A la vista del estudio se afirma que el cálculo de éstos no es viable debido a su alta carga computacional. Como solución se proponen varios métodos heurísticos que tienen un comportamiento muy robusto.

En [Kim y Ortega, 2006] se describe un algoritmo de estimación basado en el criterio de máximo a posteriori (MAP, *Maximum A Posteriori*) y que utiliza datos cuantificados provenientes de los sensores. El resultado demuestra que las prestaciones alcanzadas son mejores que la del estimador de mínimo error cuadrático medio, con una carga computacional mayor, pero razonable.

Otro caso interesante se desarrolla en [Yang et al., 2009], donde en una

red con lecturas binarias y con la utilización del método del centroide para la estimación, se estudia la importancia de la densidad de los nodos y de la uniformidad de la topología. En los resultados se demuestra la mejora de la precisión de la localización con pocos sensores si su densidad y uniformidad son adecuadas.

Capítulo 3

Planteamiento teórico

En este capítulo se van a describir de forma detallada los fundamentos teóricos del proceso de localización distribuida mediante redes de sensores densamente pobladas.

De esta manera, la primera sección contiene el planteamiento matemático del problema así como la notación utilizada en el resto del proyecto. En ella, se utiliza como punto de partida el modelo de sensor descrito en [Artés-Rodríguez, 2004], en el cual se define la probabilidad de detección de cada sensor como una función de la distancia entre la fuente o agente a localizar y el propio sensor.

En una segunda sección, se muestran las aproximaciones para dicha probabilidad de detección con las que se trabaja en este estudio.

La exposición de las diferentes características del entorno donde se emplean las redes de sensores, aparece en el tercer apartado del capítulo.

La última sección, por su parte, describe de manera minuciosa las diferentes reglas de fusión estudiadas, con las que se obtiene una estimación de la posición del agente a localizar.

3.1. Formulación del problema

Como se describió anteriormente, la localización de objetivos puede definirse como la estimación de la posición de un fenómeno físico o agente mediante un conjunto de medidas. En un caso genérico, un agente se sitúa en el área de influencia de la red formada por N sensores. Mientras, cada sensor adquiere medidas sobre el estado del entorno y, aplicando un regla de fusión local, realiza un resumen de dicha información. Posteriormente envía este resumen como un único valor de un conjunto finito de posibles valores al denominado centro de fusión. Por último, dicho fusor realiza una estimación

de la posición del agente en función de la información recibida de cada sensor, aplicando una regla de fusión global.

Por lo tanto, inicialmente se tiene un problema de decisión a nivel local para cada sensor y, finalmente, otro de estimación a nivel global. Ambos problemas se pueden observar en el diagrama de bloques de la Figura 3.1, que representa el proceso realizado para la localización de un agente.

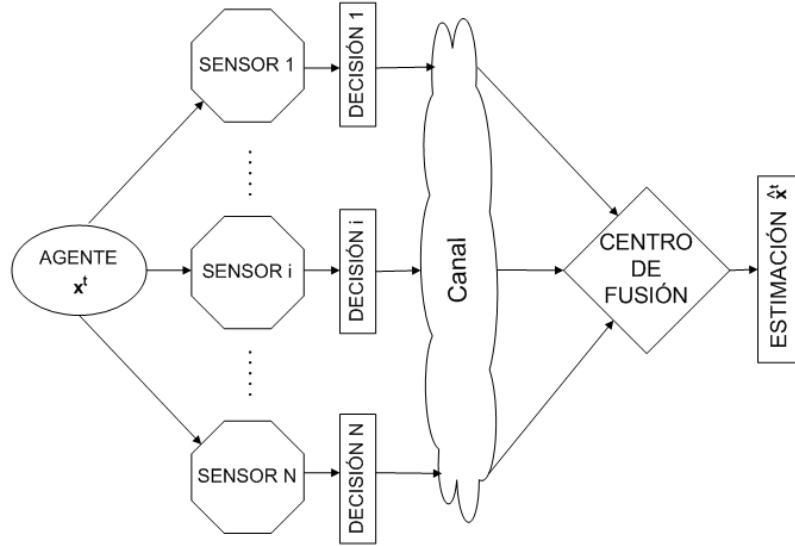


Figura 3.1: *Diagrama de bloques del proceso de localización de un agente situado en la posición \mathbf{x}^t .*

Empleando la notación utilizada en [Artés-Rodríguez, 2004], se asume que existe un agente presente en algún punto \mathbf{x}^t de una región \mathcal{D}' , y que la red, de manera previa al proceso de localización, ha realizado una detección positiva y correcta de la presencia de dicho agente en \mathcal{D}' .

Por su parte, los sensores se encuentran desplegados en una región $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ (denominada campo de sensores o región de despliegue) que satisface $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$. En este escenario, se asume que la posición de cada sensor es conocida por el centro de fusión global. Este conocimiento puede ser logrado a priori o determinado en una fase inicial del despliegue mediante algoritmos de posicionamiento relativo o métodos basados en GPS. Generalmente, en esa fase inicial se asigna un identificador a la posición donde está situado cada sensor. De esta forma, se evita la sobrecarga en la transmisión de datos, ya que después de la fase inicial, el centro de fusión dispone de una tabla identificador-posición, y simplemente será suficiente la inclusión de dicho identificador en cada mensaje para conocer a qué sensor corresponde.

Se establece que en el instante de muestreo, todos los sensores de la red adquieren información del entorno, y que la posición \mathbf{x}^t permanece invariante durante el proceso de localización, para así realizar este proceso de manera

satisfactoria. Existen otros trabajos en los que no todos los sensores adquieren datos en el instante de muestreo, logrando así una mayor duración de la vida de la red ([Lázaro et al., 2009]), pero este aspecto no entra dentro del alcance de este proyecto.

Otro aspecto importante que se fija es que sólo se considera el caso de sensores que envían información binaria. En él, los sensores aplican una decisión dura a la información captada y envían un mensaje indicando si han detectado o no la presencia de un agente mediante 1 o 0. Esta elección viene motivada por el hecho de que los recursos de una red de sensores son muy limitados (energía y ancho de banda), y resulta fundamental restringir las comunicaciones dentro de la misma transmitiendo datos binarios en lugar de utilizar medidas analógicas que resultan muy poco eficientes.

Además, debido a estas restricciones que tienen los sensores, su alcance está bastante limitado, por lo que el problema de decisión local queda reducido a determinar la presencia del agente en su área de influencia, ya que, como se ha fijado, siempre existe un agente presente en la red.

Con estas premisas, se puede representar la red como el conjunto de datos:

$$\{(\mathbf{x}_i, y_i) : i = 1, \dots, N; \mathbf{x}_i \in \mathcal{D}; y_i \in \{0, 1\}\}. \quad (3.1)$$

El par (\mathbf{x}_i, y_i) es asociado al sensor i -ésimo, donde \mathbf{x}_i es el vector que representa las coordenadas $(x_{i(1)}, x_{i(2)})$ de su posición en la red, e y_i (*lectura del sensor*) representa la decisión tomada por dicho sensor sobre la presencia o no de un agente. En el caso de que el sensor detecte la presencia de un agente y_i toma el valor 1, si no, toma el valor 0.

Pero, ¿cómo caracterizar éste comportamiento mediante el cual los sensores adquieren medidas del entorno físico y realizan una decisión en función de esta información? Para ello, se define la probabilidad de detección a nivel local para cada sensor, denominada p_d , como una función que depende de la distancia entre la posición del sensor y la del agente o fuente a localizar, tal y como se define en [Artés-Rodríguez, 2004]:

$$p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) = P(Y = 1 \mid \mathbf{X}^t = \mathbf{x}^t, \mathbf{X} = \mathbf{x}_i). \quad (3.2)$$

De este modo, p_d representa la probabilidad de que el sensor i -ésimo, situado en la posición \mathbf{x}_i , realice una detección local positiva de un agente localizado en las coordenadas \mathbf{x}^t . El parámetro α representa la probabilidad de falsa alarma del sensor (PFA) cuando no existe ningún agente presente.

En general, los sensores son dispositivos con un corto alcance, es decir, operan en su entorno más inmediato debido a sus limitados recursos. Por lo tanto, p_d tendrá un valor pequeño cuando la distancia entre sensor y agente sea grande, y viceversa. De forma genérica, ésta función p_d tiene las siguientes propiedades:

1. $p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) \geq \alpha$
2. $p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) = p_d(\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2, \alpha)$
3. $p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) \geq p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}'_i, \alpha) \Leftrightarrow \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 \leq \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}'_i\|_2$
4. $\lim_{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 \rightarrow \infty} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) = \alpha$.

Es importante destacar que se utiliza una la aproximación paramétrica de la función p_d diferente dependiendo de la naturaleza de la fuente o fenómeno que se desea localizar, así como de otros factores como la propagación de la señal emitida por ésta o el medio por el que se propaga. En este proyecto, se estudian cuatro tipos de p_d , que se describen en el Apartado 3.2.

La red propuesta se considera una red homogénea, siendo todos los sensores utilizados del mismo tipo (con idéntico modelo de p_d e igual valor de los parámetros) y aplicando éstos la misma regla de decisión binaria. La combinación de distintas clases de sensores puede mejorar la precisión de los resultados, pero ese estudio no es el objeto de este Proyecto Fin de Carrera y, por tanto, no se tratará.

Por otra parte, para la transmisión de información de los sensores al centro de fusión se asume que no existen pérdidas y que se emplea una estrategia multipunto a punto, sin saltos intermedios, aunque esta aseveración sobre la arquitectura de red no limita el alcance de los resultados. Además, la comunicación sólo tiene el sentido sensores-fusor, no existiendo un canal de realimentación.

Sin embargo, no toda la información de la red puede que esté presente en el centro de fusor, ya que en este trabajo se plantea un esquema de ahorro de energía evitando que todos los sensores transmitan su mensaje al centro de fusión. El esquema propuesto consiste en que sólo los sensores que han realizado lecturas positivas del agente se comuniquen con el fusor. Este esquema se tratará en profundidad en la Sección 3.4.

3.2. Modelos de probabilidad de detección

En el presente proyecto, se estudian cuatro modelos de probabilidad de detección y se describen a continuación:

- **Probabilidad de detección de tipo *sombrero cordobés***

Es el modelo de sensor más sencillo que se puede aproximar. En él, el sensor tiene una probabilidad de detección constante cuando el agente se encuentra dentro de su rango, y fuera de él, la p_d toma el valor de falsa alarma.

Este modelo es una aproximación de primer orden que se diferencia mucho del comportamiento de los procesos físicos en la realidad. Sin embargo, es útil para establecer una impresión preliminar de lo que está ocurriendo. Matemáticamente se expresa como:

$$p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) = \begin{cases} (1 - \beta) & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ \alpha & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Un ejemplo de este tipo de probabilidad de detección se observa en la Figura 3.2.

- **Probabilidad de detección lineal**

En este caso, la aproximación es más cercana a la de la realidad, ya que se produce un decrecimiento lineal de p_d en función de la distancia dentro del rango del sensor. Su forma matemática es:

$$p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ \alpha & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.4)$$

En la Figura 3.3, puede observarse una representación gráfica de este tipo de probabilidad.

- **Probabilidad de detección exponencial norma 2 al cuadrado**

Este tipo de modelo ha sido frecuentemente utilizado en la literatura, ya que muchos procesos físicos que monitorizan los sensores están caracterizados por un decrecimiento exponencial respecto a la distancia. Un ejemplo típico es la propagación isotrópica. En este caso, p_d queda definido como:

$$p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) = \alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2}. \quad (3.5)$$

Una probabilidad de detección de tipo exponencial norma 2 al cuadrado se representa en la Figura 3.4.

- **Probabilidad de detección exponencial norma 2**

Al igual que el caso anterior, este modelo es usual encontrarlo en fenómenos de la naturaleza. Su expresión matemática se define como:

$$p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) = \alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2}. \quad (3.6)$$

Su representación gráfica se observa en la Figura 3.5.

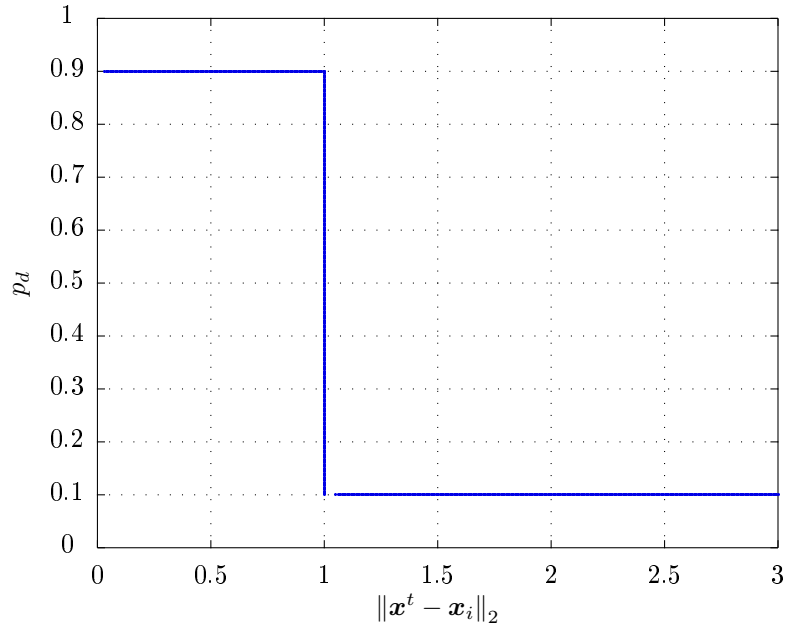


Figura 3.2: Probabilidad de detección tipo sombrero cordobés considerando $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ y $r_o = 1$. Los valores de $\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2$ y r_o se expresan en unidades normalizadas.

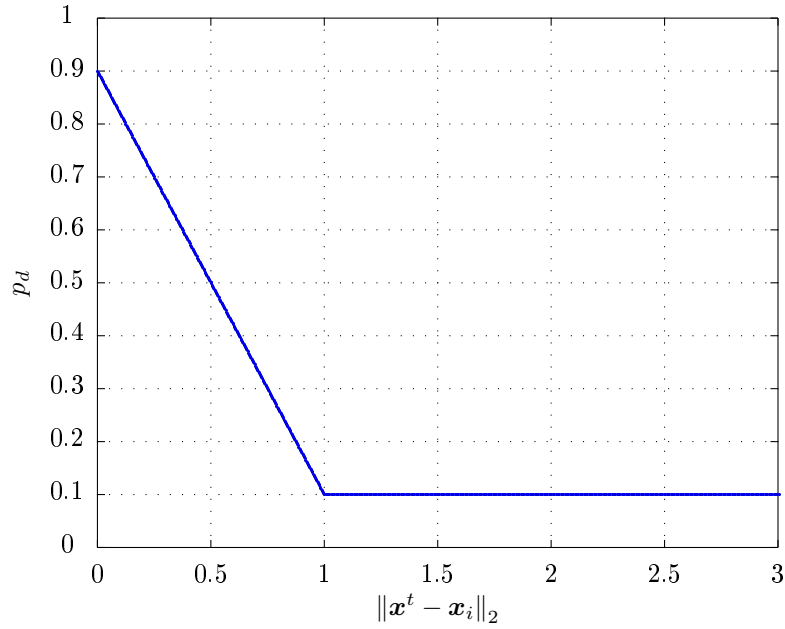


Figura 3.3: Probabilidad de detección tipo lineal considerando $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ y $r_o = 1$. Los valores de $\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2$ y r_o se expresan en unidades normalizadas.

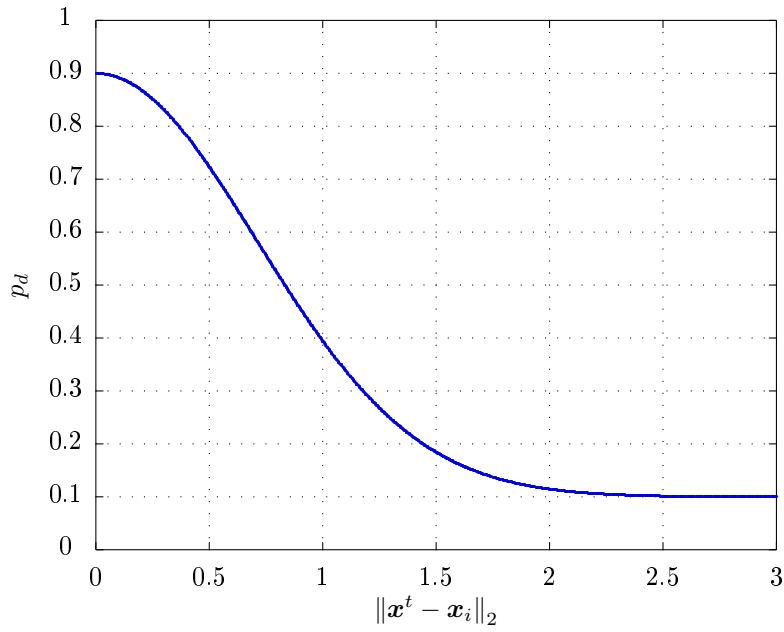


Figura 3.4: Probabilidad de detección tipo exponencial norma 2 al cuadrado considerando $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ y $\theta = 1$. Los valores de $\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2$ se expresan en unidades normalizadas.

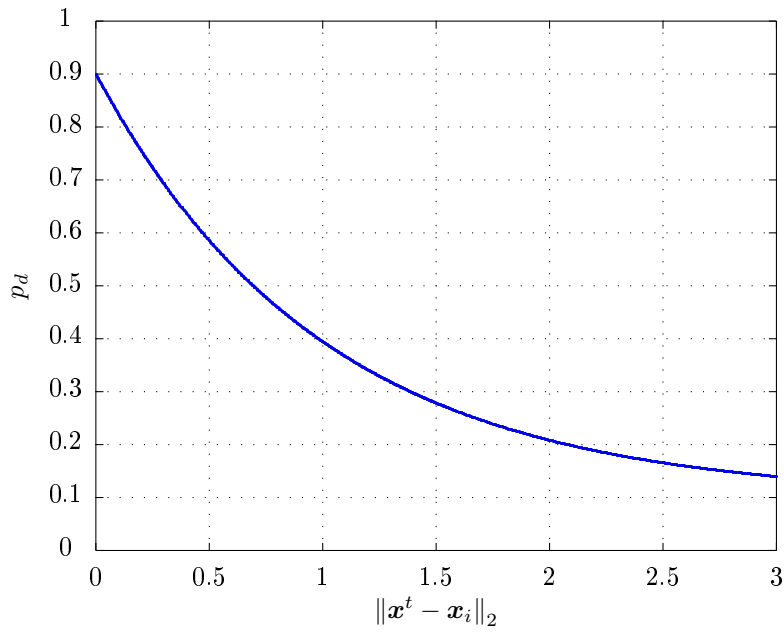


Figura 3.5: Probabilidad de detección tipo exponencial norma 2 considerando $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ y $\theta = 1$. Los valores de $\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2$ se expresan en unidades normalizadas.

En estas ecuaciones, $\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2$ es la distancia entre el sensor i -ésimo y el agente, α es la PFA, β representa la probabilidad de pérdida de un agente situado en la misma posición que el sensor, r_o es el rango del sensor para los casos de *sombrero cordobés* y lineal, y por último θ es el parámetro que determina el rango del sensor para los casos exponenciales.

Una vez descritos los tipos de p_d estudiadas es necesario fijar, debido a la diferente naturaleza de estos tipos de probabilidades de detección, una cierta equivalencia entre ellas. De no establecerse esta equivalencia, los resultados obtenidos para la localización de objetivos con cada tipo de probabilidad no pueden ser comparados directamente unos con otros.

Para conseguirlo, en primer lugar se define que los valores de α y β deben ser idénticos para todos los tipos de probabilidad de detección. Esto es debido a que, para poder realizar una comparación equitativa, los valores máximo y mínimo de p_d deben iguales para los cuatro casos, y dichos valores quedan fijados por estos parámetros:

$$\begin{aligned} \text{Máximo} &\Rightarrow p_d(\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 = 0) = 1 - \beta \\ \text{Mínimo} &\Rightarrow p_d(\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 \rightarrow \infty) = \alpha. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Es importante destacar también que, en regiones lejanas al sensor, todas las funciones de p_d que se estudian son idénticas, ya que en esos casos la probabilidad de detección alcanza el valor de falsa alarma. Por lo tanto, para que exista cierta equivalencia entre probabilidades, es necesario conseguir que las formas de éstas sean lo más parecidas posible en la región cercana al sensor.

Dicha región será el rango de acción del sensor, y se establece como el área que comprende la posición del sensor y los puntos donde la probabilidad de detección de éste toman el valor de falsa alarma (α). En el caso de las probabilidades de tipo *sombrero cordobés* y lineal, este valor se alcanza cuando $\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}\|_2 = r_o$. Sin embargo, debido a la naturaleza de las probabilidades exponenciales, el valor de α sólo se alcanza en el infinito. Por lo tanto, es razonable considerar que estos sensores entran en falsa alarma en los puntos donde la p_d alcanza un valor un 1 % mayor que α .

Observando las distintas funciones de probabilidad, se puede aseverar que para lograr la equivalencia buscada no es necesario tener en cuenta el nivel que representa la probabilidad de falsa alarma α en las p_d , porque al fijarse un valor igual para todos los tipos de probabilidades, representa un elemento común en todas estas funciones, tal y como se observa en la Figura 3.6. Así pues, es suficiente estudiar sólo la parte diferencial de las p_d , que se define como:

$$g(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i) = p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha. \quad (3.8)$$

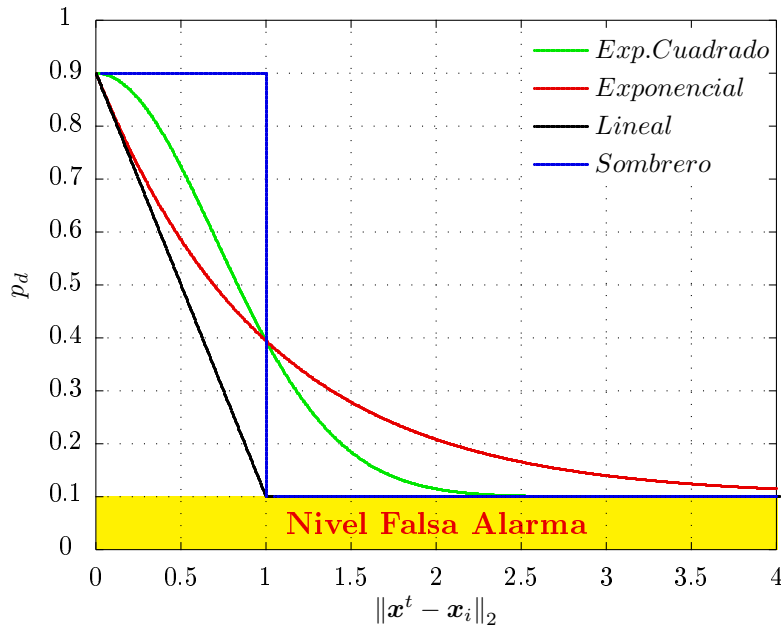


Figura 3.6: Nivel de falsa alarma común a todos los tipos de probabilidad de detección. Los valores de $\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2$ se expresan en unidades normalizadas.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se puede establecer como criterio razonable para la comparación de las distintas p_d , que en el rango del sensor, la probabilidad de detección total por encima del umbral de falsa alarma sea idéntica para todos los tipos (matemáticamente equivale a igualar el volumen encerrado por la superficie $g(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i)$ de todos los casos). Este hecho se resume, una vez fijados α y β , en determinar el valor de los parámetros r_o y θ para cumplir la citada condición.

En el Apéndice B aparece el desarrollo completo de las expresiones de estos parámetros para cada tipo de probabilidad de detección, en función del valor del volumen V que se desea que encierre $g(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i)$ en el rango del sensor. Dichas expresiones son:

- **Sombrero Cordobés**

$$r_o = \sqrt{\frac{V}{\pi(1 - \alpha - \beta)}}. \quad (3.9)$$

- **Lineal**

$$r_o = \sqrt{\frac{3V}{\pi(1 - \alpha - \beta)}}. \quad (3.10)$$

- Exponencial norma 2 al cuadrado

$$\theta = \frac{\pi}{V} \left[1 - 1.01\alpha - \beta \right]. \quad (3.11)$$

- Exponencial norma 2

$$\theta = \sqrt{\frac{2\pi}{V} \left[1 + 0.01\alpha \ln \left(\frac{0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right) - 1.01\alpha - \beta \right]}. \quad (3.12)$$

De manera general, la probabilidad de tipo *sombrero cordobés* es utilizada como referencia. Es decir, se fija r_o para este tipo de p_d , y a partir de él, son obtenidos los parámetros de las otras probabilidades (lineal, exponencial y exponencial al cuadrado).

Un ejemplo de la equivalencia de las probabilidades se observa en la Figura 3.7. En ella, se ha fijado $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, y un rango de valor $r_o = 1$ (unidades normalizadas) para la p_d *sombrero cordobés*. Este valor ha generado un volumen encerrado $V = 2.51$ (unidades normalizadas) en la región de interés, y sustituyendo en las ecuaciones (3.10), (3.11) y (3.12) se obtiene $r_o = 1.732$ (unidades normalizadas) para p_d lineal, $\theta = 0.998$ para exponencial al cuadrado y $\theta = 1.407$ para exponencial. De esta forma los cuatro tipos de p_d representados tienen una equivalencia razonable entre ellos, y sus resultados pueden ser comparados de manera justa.

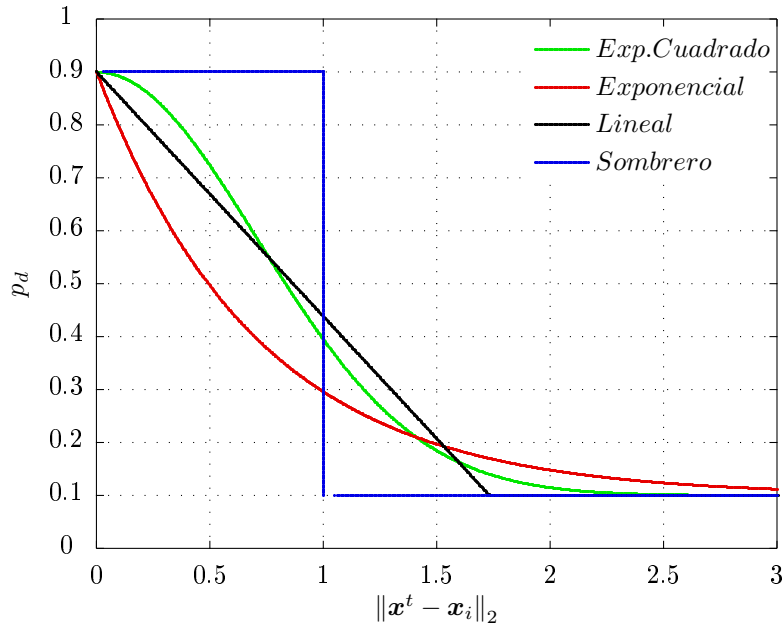


Figura 3.7: Ejemplo de equivalencia entre los cuatro tipos de probabilidad de detección. Los valores de $\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2$ se expresan en unidades normalizadas.

3.3. Definición de áreas y despliegues

En el siguiente apartado se realiza una completa descripción de los escenarios empleados en el proyecto para la implementación del proceso de localización realizado por las redes de sensores. Estos escenarios surgen de la combinación de los diferentes despliegues y áreas utilizadas.

Como ya se conoce, los sensores se encuentran desplegados en una región $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$, siendo \mathcal{D} una región finita. Además, se fija que el agente a localizar está situado en un punto de una subregión \mathcal{D}' ($\mathbf{x}^t \in \mathcal{D}'$), de tal forma que $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$. Este hecho permite obtener una mejora del proceso de localización realizado por la red, tal y como se comprobará en el capítulo de resultados.

Ambas regiones \mathcal{D} y \mathcal{D}' se establece que sean concéntricas, y además, dicho centro se sitúa, por simplicidad matemática, en el origen del sistema de coordenadas, ya que un desplazamiento del sistema de coordenadas no representa ninguna variación en la precisión del proceso de localización.

Los tipos de regiones \mathcal{D} y \mathcal{D}' que se proponen para este proyecto son:

- **Regiones cuadradas**

En este primer caso, definido en [Artés-Rodríguez et al., 2004], tanto el campo de sensores como la región donde se sitúa el agente a localizar son cuadrados. Para establecer la longitud de dichos cuadrados, se definen los parámetros r_e y r'_e . El primero indica la longitud de un semilado de la región \mathcal{D} , mientras que r'_e hace lo propio para \mathcal{D}' . Por lo tanto cada región cuadrada tendrá lados de longitud $2r_e$ y $2r'_e$ respectivamente, tal y como se muestra en la Figura 3.8.

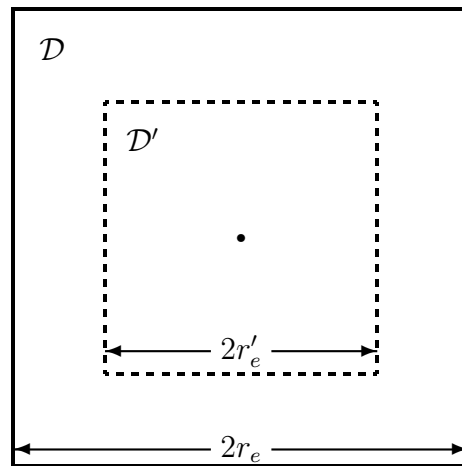


Figura 3.8: Representación de las regiones \mathcal{D} y \mathcal{D}' de tipo cuadrado cuyos lados son de longitud $2r_e$ y $2r'_e$.

- **Regiones circulares**

En este tipo de escenario, el campo de sensores y la zona donde se sitúa el agente tienen forma circular. Los parámetros r_e y r'_e tienen un significado diferente al caso anterior, representando la longitud del radio de cada una de las citadas regiones (Figura 3.9).

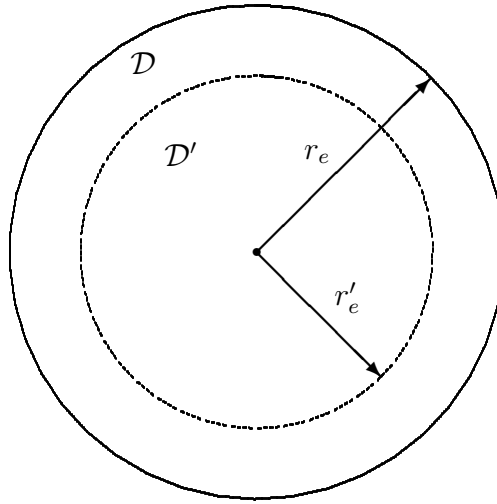


Figura 3.9: Regiones \mathcal{D} y \mathcal{D}' circulares de radios r_e y r'_e .

Además del tipo de región donde se utiliza la red de sensores, es importante establecer cual es la topología que se va a usar para un correcto funcionamiento de la misma. Un aspecto crítico que determina dicha topología es el tipo de despliegue que se realiza de los nodos sensores. De igual manera, otros múltiples factores durante la vida de la red influyen en la topología de la red (limitación energética de los sensores, fiabilidad de los mismos, ...). Sin embargo, para las pruebas realizadas no se tiene en consideración este último aspecto, asumiendo que la topología no varía desde el momento en el que despliegan de los sensores.

En este estudio, se consideran los dos tipos de despliegue más comunes de las redes de sensores:

- **Despliegue aleatorio**

Es el despliegue más común debido al gran número de sensores utilizados en las redes (pueden llegar al orden de miles), y a que, en muchas ocasiones, la zona donde sucede el fenómeno a observar es de difícil acceso.

Para simular esta clase de despliegue, se establece una densidad de sensores por unidad de área ρ_s y se generan de manera aleatoria las posiciones de cada uno de los sensores mediante una distribución uniforme sobre la región \mathcal{D} .

• Despliegue ordenado

Es menos común en redes reales, ya que la colocación de los nodos sensores se realiza uno a uno, y en redes con gran número de nodos puede resultar inabordable.

En este trabajo se particulariza en un despliegue uniforme de sensores, donde se define una densidad ρ_s como en el caso anterior, y se colocan los sensores en los puntos de intersección de una cuadrícula o rejilla que cubre la región \mathcal{D} . Esta rejilla se centra sobre los ejes de coordenadas $x_{(1)}$ y $x_{(2)}$, de tal forma que siempre existe una hilera de sensores sobre cada uno de dichos ejes. Además, se impone que las distancias entre sensores en las dos direcciones de espacio $(x_{(1)}, x_{(2)})$ sean iguales.

Con estas premisas se logra que en regiones cuadradas y circulares con igual punto de origen, área y densidad de sensores ρ_s , la posición de los nodos sea idéntica en la superficie en la que ambas regiones se solapan, por lo que se pueden comparar sus prestaciones en igualdad de condiciones.

Dos ejemplos del despliegue ordenado de sensores de tipo rejilla sobre la región \mathcal{D} pueden observarse en la Figura 3.10.

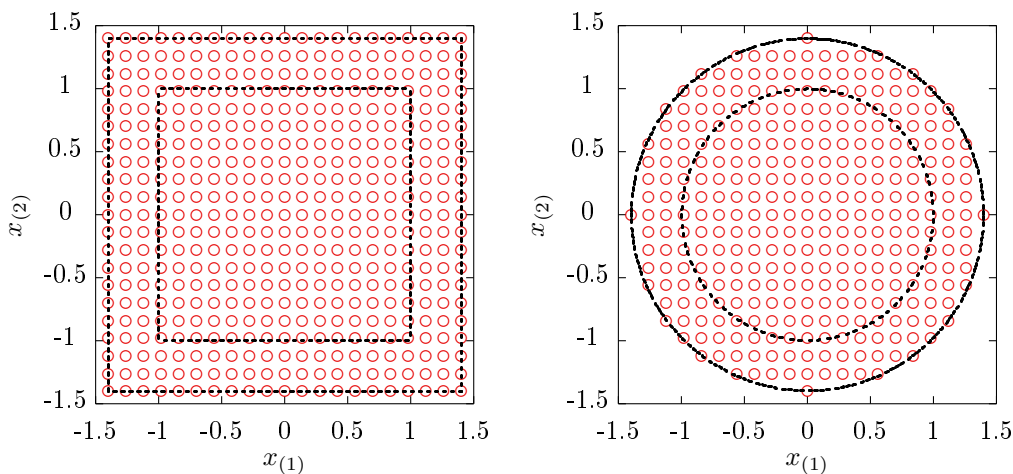


Figura 3.10: Despliegue de sensores ordenado en rejilla en la región \mathcal{D} en escenarios cuadrado y circular.

3.4. Localización del agente

Llegados a este punto, se retoma el proceso de localización de un agente que previamente ha sido detectado por la red de sensores. Como se explicó en el Apartado 3.1, los sensores realizan una decisión local sobre la presencia o no del agente en su rango, y envían su información al centro de fusión para que estime la posición \mathbf{x}^t de éste.

Para implementar el proceso de localización, el fusor aplica una regla de fusión global a los datos recibidos como se observa en el Esquema 3.1 de la Página 32. En esta sección, se exponen las tres reglas de fusión estudiadas en este Proyecto Final de Carrera: el método de máxima verosimilitud (ML), el método de mínimo riesgo empírico (ERM) y el método basado en distancias.

Es importante recalcar que la información de la que dispone el centro fusor para realizar la localización consiste en:

1. *Las lecturas y_i realizadas por los sensores.*

Cada una de estas lecturas es acompañada por un identificador del sensor al que corresponde. Dicho identificador es asignado a cada sensor en la fase de despliegue de la red para evitar una sobrecarga en la transmisión de datos, tal y como se explicó anteriormente.

2. *La posición \mathbf{x}_i de cada sensor.*

Como se indicó en la Sección 3.1, el nodo fusor adquiere este conocimiento en la fase de despliegue de la red.

3. *La función de probabilidad de detección local $p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)$ que aplican los sensores.*

En redes de sensores reales, esta función puede ser obtenida de manera analítica (basándose en el conocimiento sobre el fenómeno físico que se desea localizar), o de forma empírica (mediante un promedio de medidas experimentales tomadas de dicho fenómeno).

Por otra parte, tal y como se explicó en la Sección 2.2, la gestión de la energía es un aspecto crítico en las redes de sensores. El reemplazo de las baterías de los nodos sensores es, generalmente, una tarea muy costosa o incluso imposible de realizar. Consecuentemente, la utilización de técnicas que reduzcan el gasto energético resulta fundamental para prolongar el tiempo de vida de la red. Asumiendo que, en sensores alimentados mediante baterías, la transmisión inalámbrica de información desde los sensores hasta el centro fusor representa la operación de mayor consumo energético [Boser et al., 2001], se plantean dos escenarios para la localización de agentes:

- **Escenario sin censura**

En este primer caso, no se aplica ninguna técnica de ahorro energético, por lo que todos los sensores, independientemente de si la lectura generada por cada uno de ellos ha sido positiva ($y_i = 1$) o negativa ($y_i = 0$), transmiten su información al centro fusor.

- **Escenario con censura**

Este esquema de transmisión, en contraposición al anterior, trata de economizar la energía de los sensores, y en consecuencia, la de la red entera. Se basa en la programación de cada sensor para que sólo transmita su información al centro de fusión cuando la detección del agente haya sido positiva ($y_i = 1$). Por lo tanto, los sensores con una detección negativa ($y_i = 0$) no transmiten para así reducir el gasto de energía.

Con estos escenarios, pueden compararse las prestaciones obtenidas para la localización con y sin estrategia de ahorro de energía para cada método de fusión.

Finalmente, y como norma general para todos los métodos que se describen, se propone una corrección de la estimación final obtenida cuando dicha estimación no sea un punto perteneciente a la región \mathcal{D}' . Esta circunstancia es debida a un error de precisión de la estimación en situaciones en las que el agente a localizar se encuentra en algún punto cercano a los límites de \mathcal{D}' . No obstante, gracias al conocimiento a priori sobre la situación del agente — $\mathbf{x}^t \in \mathcal{D}'$ — se establece que la estimación lograda en estos casos se sustituya por el punto de la región \mathcal{D}' más cercano a dicha estimación (Figura 3.11). De esta forma, se logra una mejora de la precisión del proceso de localización.

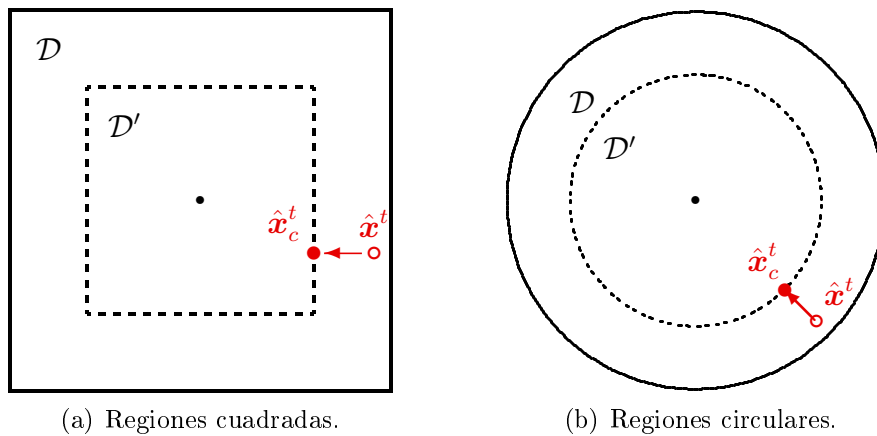


Figura 3.11: *Ejemplo de corrección de la estimación final. Cuando la estimación obtenida por cualquiera de los métodos estudiados ($\hat{\mathbf{x}}^t$) no pertenece a la región \mathcal{D}' , es sustituida por el punto más cercano de \mathcal{D}' , nombrado $\hat{\mathbf{x}}_c^t$.*

3.4.1. Método de máxima verosimilitud (ML)

En este primer apartado, el nodo fusor implementa como regla de fusión el estimador de máxima verosimilitud. Dicho método se fundamenta en que el fusor, una vez recibida la información proveniente de los sensores de la red, calcule el valor de la posición del agente a localizar que maximiza la probabilidad de aparición de dichos datos recibidos.

En primer lugar se va a suponer un escenario sin censura, en el que las lecturas y_i de los N nodos sensores de la red son transmitidas al centro de fusión (tanto lecturas positivas como negativas).

■ ESCENARIO SIN CENSURA

Es importante recordar que se parte de un modelo en el cual la probabilidad de detección de los sensores varía como una función p_d de la distancia entre la posición del sensor y la de la fuente o agente a localizar. En este marco teórico, y tal y como se plantea en [Artés-Rodríguez, 2004], es posible establecer el problema de detección del agente mediante un test de hipótesis binarias.

Antes de desarrollar dicho test, resulta necesario introducir la notación que se va a utilizar: \mathbf{X} , Y y \mathbf{X}^t son las variables aleatorias que representan la posición del sensor, la lectura del mismo y la posición del agente, respectivamente. Por su parte, \mathbf{x}_i , y_i y \mathbf{x}^t son las realizaciones (valores de realización) de dichas variables aleatorias.

- Hipótesis nula H_0 para el caso en el que el agente no está presente. Bajo esta hipótesis, la función de densidad de probabilidad conjunta de \mathbf{X} e Y es:

$$f_{\mathbf{X},Y|H_0}(\mathbf{x}_i, y_i|H_0) = \rho(\alpha \delta[y_i - 1] + (1 - \alpha) \delta[y_i]). \quad (3.13)$$

- Hipótesis alternativa H_1 para el caso en el que el agente está presente. Bajo esta hipótesis, la función de densidad de probabilidad conjunta de \mathbf{X} e Y es:

$$f_{\mathbf{X},Y|H_1}(\mathbf{x}_i, y_i|H_1) = \rho\left(p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) \delta[y_i - 1] + (1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)) \delta[y_i]\right), \quad (3.14)$$

donde $\rho = \left(\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x}\right)^{-1}$ y δ es la función de Kronecker.

Además, se asume que las muestras $\{(\mathbf{x}_i, y_i) : i = 1, \dots, N; \mathbf{x}_i \in \mathcal{D}; y_i \in \{0, 1\}\}$ son condicionalmente independientes (bajo H_0 o H_1).

Por lo tanto, debido a que en el proceso de localización se establece como premisa que el agente a localizar ha sido previamente detectado por la red, es decir, que existe un agente presente, la Ecuación (3.14) es la que se aplica en este caso.

El centro fusor, una vez ha recibido la colección de lecturas de los sensores $\mathbf{y} = \{y_i : i = 1, \dots, N\}$ con sus correspondientes identificadores, estima la posición del agente \mathbf{x}^t . La función de verosimilitud que obtiene, asumiendo que los sensores tienen independencia al tomar datos del entorno es:

$$f_{\mathbf{X}, \mathbf{Y} | \mathbf{X}^t}(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{x}^t) = \prod_{i=1}^N f_{\mathbf{X}, \mathbf{Y} | \mathbf{X}^t}(\mathbf{x}_i, y_i | \mathbf{x}^t). \quad (3.15)$$

Sustituyendo la función densidad de probabilidad (FDP) conjunta de las observaciones \mathbf{X} e \mathbf{Y} para la hipótesis H_1 , en la que el sensor está presente (Ecuación (3.14)):

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}, \mathbf{Y} | \mathbf{X}^t}(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{x}^t) &= \prod_{i=1}^N \left[\rho \left(p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) \delta[y_i - 1] + (1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)) \delta[y_i] \right) \right] = \\ &= \prod_{i=1}^N \left[\rho \left(p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)^{\delta[y_i - 1]} (1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha))^{\delta[y_i]} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para obtener el estimador ML es necesario resolver el siguiente problema de optimización:

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \arg \max_{\mathbf{x}^t} f_{\mathbf{X}, \mathbf{Y} | \mathbf{X}^t}(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{x}^t). \quad (3.17)$$

Sustituyendo el valor de la función de verosimilitud (Ecuación (3.16)):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^t &= \arg \max_{\mathbf{x}^t} \prod_{i=1}^N \left[\rho \left(p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)^{\delta[y_i - 1]} (1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha))^{\delta[y_i]} \right) \right] = \\ &= \arg \max_{\mathbf{x}^t} \prod_{i=1}^N \left[p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)^{\delta[y_i - 1]} (1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha))^{\delta[y_i]} \right] = \\ &= \arg \max_{\mathbf{x}^t} \left[\sum_{i: y_i = 1} \ln p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) + \sum_{i: y_i = 0} \ln (1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Desafortunadamente, el problema resultante no puede solucionarse de forma analítica. Por este motivo, se realiza una aproximación al valor del estimador ML, tal y como propone [Artés-Rodríguez et al., 2004]. Éste artículo sólo analiza el caso de una p_d de tipo exponencial al cuadrado, sin embargo en este proyecto se generaliza esta aproximación para los otros tres tipos de p_d propuestos. La citada aproximación consta de dos fases:

- **Inicialización**

Se obtiene un valor inicial para la estimación $\hat{\mathbf{x}}^t$ evaluando la función de verosimilitud (Ecuación (3.18)) en las posiciones donde se encuentran los sensores que han enviado una lectura (positiva o negativa) al fusor. Una vez calculada la verosimilitud en todos esos puntos, se selecciona como estimación inicial $\hat{\mathbf{x}}^t(0)$ la posición del sensor que mayor valor ha producido.

$$\hat{\mathbf{x}}^t(0) = \arg \max_{\mathbf{x}_j} \left[\sum_{i:y_i=1} \ln p_d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i, \alpha) + \sum_{i:y_i=0} \ln (1 - p_d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i, \alpha)) \right], \quad (3.19)$$

siendo $i = 1, \dots, N$ y $j = 1, \dots, N$.

Ésta es una aproximación cercana al valor máximo de la función de verosimilitud, e incluso si la red es suficientemente densa, es decir, el número de sensores N es lo bastante grande, este valor puede tomarse como la estimación final de \mathbf{x}^t .

- **Algoritmo de búsqueda**

Debido a que la aproximación inicial puede que no sea tan precisa como se requiere, se realiza un refinamiento del máximo de la función de verosimilitud aplicando una estrategia de ascenso por gradiente. Este algoritmo permite desplazarse en la dirección del gradiente —o mayor pendiente— de la función de verosimilitud, y de esta forma encontrar el máximo buscado.

Partiendo del valor inicial (Ecuación(3.19)), la ecuación que proporciona una estimación actualizable basada en el gradiente es:

$$\mathbf{x}^t(n+1) = \mathbf{x}^t(n) + \eta \nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t), \quad (3.20)$$

donde n es el número de la iteración actual, $\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t)$ representa el valor del gradiente de la función de verosimilitud, y η es el paso utilizado en cada iteración.

Para optimizar el algoritmo de búsqueda, en este proyecto se propone utilizar un paso adaptativo, de tal forma que η no es una constante, sino que su valor aumenta o disminuye de una iteración a otra. Esto permite que la búsqueda converja a un valor final de forma más rápida y precisa. La variación se produce de dos maneras:

1. Si el valor de la función de verosimilitud lograda en la iteración $(n+1)$ es mayor que la obtenida en la iteración (n) , el valor de

η aumenta para la siguiente iteración $(n + 2)$. De esta forma, el acercamiento al máximo se logra en un número menor de iteraciones.

2. Si por el contrario, el valor de la verosimilitud en la iteración $(n + 1)$ es menor respecto a la iteración (n) , se recalcula la estimación $(n + 1)$, disminuyendo η de forma recursiva hasta que la verosimilitud obtenida aumente respecto a la iteración (n) . Con esta variación se evita un alejamiento del máximo buscado, y se depura la aproximación al mismo.

El éxito de este algoritmo de búsqueda local radica en que, como se ha comentado anteriormente, el valor de inicialización $\hat{\mathbf{x}}^t(0)$ es cercano al máximo de la función de verosimilitud, y por tanto, el máximo alcanzado con el gradiente será el máximo global de dicha función.

Es necesario indicar que, dependiendo del tipo de probabilidad de detección utilizada, la forma de la función de verosimilitud (Ecuación (3.16)) es diferente. Esto conlleva que la expresión del gradiente de dicha función también varía según la aproximación de $p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)$ que se emplee. A continuación se expone la formulación de los gradientes —en forma matricial— para los casos de probabilidad de tipo lineal, exponencial norma 2 al cuadrado y exponencial norma 2, cuyas demostraciones se encuentran en el Apéndice C.

○ Probabilidad de detección de tipo lineal

Como resultado del cálculo del gradiente para esta p_d , cuya formulación matemática se observa en la Ecuación (3.4) de la Página 35, se obtiene la expresión:

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 [\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y}_d - \mathbf{X} \mathbf{y}_{cd} - \mathbf{x}^t \mathbf{k}^T \mathbf{d} + \mathbf{X} \mathbf{k}_d]. \quad (3.21)$$

○ Probabilidad de detección de tipo exponencial norma 2 al cuadrado

Este caso es tratado en [Artés-Rodríguez et al., 2004], donde se utiliza una probabilidad de detección de tipo exponencial al cuadrado, tal y como se formula en la Ecuación (3.5). El gradiente que se obtiene es:

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = -2\theta [\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{y}_c - \mathbf{x}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X} \mathbf{k}]. \quad (3.22)$$

○ Probabilidad de detección de tipo exponencial norma 2

En último lugar se desarrolla el gradiente para una función p_d exponencial, que ha sido formulada en la Ecuación (3.6).

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = -\theta [\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{y}_c - \mathbf{x}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X} \mathbf{k}]. \quad (3.23)$$

Los parámetros que aparecen en las ecuaciones de los gradientes representan:

- α Probabilidad de falsa alarma.
- β Probabilidad de pérdida de un agente situado en la misma posición que el sensor.
- r_o Rango del sensor (caso lineal).
- θ Parámetro que determina el rango del sensor (casos exponenciales).
- \mathbf{x}^t Vector columna con las coordenadas estimadas, en la iteración n , del agente a localizar.
- \mathbf{X} Matriz $2 \times N$, en la que cada columna corresponde las coordenadas \mathbf{x}_i de cada uno de los sensores que han enviado su lectura al fusor.
- \mathbf{y} Vector columna que contiene las lecturas de los sensores y_i .
- $\mathbf{1}$ Vector columna de N unos.
- \mathbf{d} Vector columna de elementos d_i , que se definen como:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.24)$$

- \mathbf{k} Vector columna de elementos:

$$k_i = \begin{cases} \frac{1}{(1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)) (p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - 1 + \beta)} & \text{si Lineal} \\ \frac{p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha}{1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)} & \text{si Exp. Cuadrado} \\ \frac{p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha}{(1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)) \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} & \text{si Exponencial.} \end{cases} \quad (3.25)$$

- \mathbf{c} Vector columna de elementos c_i :

$$c_i = \frac{k_i}{p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)}. \quad (3.26)$$

- \mathbf{k}_d Vector columna con elementos $k_{di} = k_i d_i$.
- \mathbf{y}_d Vector columna con elementos $y_{di} = y_i d_i$.
- \mathbf{y}_c Vector columna con elementos $y_{ci} = y_i c_i$.
- \mathbf{y}_{cd} Vector columna con elementos $y_{cdi} = y_i c_i d_i$.

Es necesario realizar dos últimas precisiones sobre los gradientes obtenidos:

1. Para el caso de una p_d de tipo exponencial, si en una iteración se obtiene que $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}_j$, siendo \mathbf{x}_j la posición de alguno de los sensores de la

red, entonces la Ecuación (3.23) presenta una indeterminación. Para solucionarla (desarrollo detallado en el Apéndice C.3), se sustituye el término del gradiente correspondiente al sensor con posición \mathbf{x}_j , por su límite cuando \mathbf{x}^t tiende a \mathbf{x}_j :¹

$$\nabla \mathbf{L}_{\text{nuevo}}^j = \lim_{\mathbf{x}^t \rightarrow \mathbf{x}_j} \nabla \mathbf{L}^j \approx \left(\frac{-\theta(p_d - \alpha)}{p_d} y_j + \frac{\theta(p_d - \alpha)}{(1 - p_d)} (1 - y_j) \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

2. El caso de probabilidad de detección de tipo *sombrero cordobés* se trata de manera diferente, ya que no se utiliza un refinamiento por gradiente, sino que la aproximación inicial $\hat{\mathbf{x}}^t(0)$ es tomada como estimación final. La razón reside en la forma que tiene dicha función p_d , que es una función escalonada —no continua—, lo que provoca que la función de verosimilitud correspondiente también lo sea, y este hecho plantea problemas para aplicar el gradiente. Además, no existe un único punto máximo, sino una zona de máximos que depende del parámetro r_o , por lo que utilizar un algoritmo de búsqueda no garantiza que el punto obtenido sea el máximo deseado, ya que puede ser otro punto de la región de máximos.

Una vez aplicada la aproximación, se obtiene una estimación final $\hat{\mathbf{x}}^t$ de la posición del sensor a localizar. Sin embargo, en los casos que sea necesario se realiza la corrección de $\hat{\mathbf{x}}^t$, propuesta en este proyecto, y que se describió al principio del capítulo.

■ ESCENARIO CON CENSURA

En este escenario —que también es tratado en [Artés-Rodríguez et al., 2004] para el caso de p_d exponencial cuadrado—, se establece que los sensores que realizan una detección local negativa del agente ($y_i = 0$) no envíen sus lecturas al nodo fusor. Por lo tanto, las únicas lecturas disponibles en éste son las de los N_u sensores que han detectado de manera positiva ($y_i = 1$) la presencia del agente.

La expresión del estimador de máxima verosimilitud se obtiene de forma análoga a la del caso sin censura, pero considerando solamente las lecturas positivas. De esta forma el estimador ML se reduce a:

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \arg \max_{\mathbf{x}^t} \prod_{i=1}^N p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)^{\delta[y_i-1]} = \arg \max_{\mathbf{x}^t} \left[\sum_{i:y_i=1} \ln p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) \right]. \quad (3.28)$$

¹El gradiente de la función verosimilitud puede ser expresado como la suma de la contribución de cada sensor \mathbf{x}_i : $\nabla \mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \nabla \mathbf{L}^i$.

En este caso, tampoco la Ecuación (3.28) tiene solución analítica, por lo que se realiza la misma aproximación que en el caso sin censura:

- **Inicialización**

Para conseguir un valor inicial de la estimación $\hat{\mathbf{x}}^t$, las posiciones de los sensores que han enviado sus lecturas al fusor son utilizadas como posible estimación de la posición del agente, eligiendo como estimación inicial $\hat{\mathbf{x}}^t(0)$, la que mayor valor de la función de verosimilitud alcanza.

$$\hat{\mathbf{x}}^t(0) = \arg \max_{\mathbf{x}_j} \left[\sum_{i:y_i=1} \ln p_d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i, \alpha) \right], \quad (3.29)$$

siendo $i = 1, \dots, N_u$ y $j = 1, \dots, N_u$.

Es necesario incidir que en este caso se establece que sólo las posiciones de los sensores con lecturas positivas son utilizadas para obtener este valor inicial, y no la de todos los sensores de la red como ocurría en el caso sin censura. De esta forma se produce otro ahorro energético al reducir la carga computacional del fusor.

- **Algoritmo de búsqueda**

Al igual que en el escenario sin censura, se realiza un refinamiento del máximo mediante una búsqueda ascendente por gradiente para todos los tipos de p_d , excepto para el tipo *sombrero cordobés*. La Ecuación (3.20) sigue siendo válida en este escenario para obtener la estimación actualizable basada en la búsqueda por gradiente, y también se continúa utilizando el paso adaptativo para mejorar dicha búsqueda.

Los gradientes obtenidos, cuyos desarrollos íntegros aparecen en el Apéndice C, son:

- Probabilidad de detección de tipo lineal

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 [\mathbf{x}^t \mathbf{l}^T \mathbf{d} - \mathbf{X} \mathbf{l}_d]. \quad (3.30)$$

- Probabilidad de detección de tipo exponencial norma 2 al cuadrado

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = -2\theta [\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X} \mathbf{c} - \mathbf{x}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X} \mathbf{k}]. \quad (3.31)$$

- Probabilidad de detección de tipo exponencial norma 2

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = -\theta [\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X} \mathbf{c} - \mathbf{x}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X} \mathbf{k}]. \quad (3.32)$$

Los parámetros que aparecen en las ecuaciones de los gradientes representan:

- α Probabilidad de falsa alarma.
- β Probabilidad de pérdida de un agente situado en la misma posición que el sensor.
- r_o Rango del sensor (caso lineal).
- θ Parámetro que determina el rango del sensor (casos exponenciales).
- \mathbf{x}^t Vector columna con las coordenadas estimadas, en la iteración n , del agente a localizar.
- \mathbf{X} Matriz $2 \times N_u$, en la que cada columna corresponde las coordenadas \mathbf{x}_i de cada uno de los sensores que han enviado su lectura al fusor, en este caso, los que han realizado una detección positiva ($y_i = 1$).
- $\mathbf{1}$ Vector columna de N_u unos.
- \mathbf{d} Vector columna de elementos d_i , que se definen como:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.33)$$

- l Vector columna con elementos:

$$l_i = \frac{1}{p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) (p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - 1 + \beta)}. \quad (3.34)$$

- \mathbf{k} Vector columna de elementos:

$$k_i = \begin{cases} \frac{p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha}{1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)} & \text{si Exp. Cuadrado} \\ \frac{p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha}{(1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)) \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} & \text{si Exponencial.} \end{cases} \quad (3.35)$$

- \mathbf{c} Vector columna de elementos c_i :

$$c_i = \frac{k_i}{p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)}. \quad (3.36)$$

- \mathbf{l}_d Vector columna con elementos $l_{di} = l_i d_i$.

Al igual que en el caso sin censura, para la probabilidad de tipo exponencial existe una indeterminación en el gradiente si se produce que $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}_j$ (siendo \mathbf{x}_j la posición de alguno de los sensores de la red). Para resolverlo, se sustituye la contribución del sensor al gradiente por el límite de dicho término cuando \mathbf{x}^t tiende a \mathbf{x}_j (Apéndice C.3).

$$\nabla \mathbf{L}_{\text{nuevo}}^j = \lim_{\mathbf{x}^t \rightarrow \mathbf{x}_j} \nabla \mathbf{L}^j \approx \left(\frac{-\theta(p_d - \alpha)}{p_d} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

También en esta ocasión se realiza una corrección de la estimación final si dicha posición corresponde a un punto que no pertenece a la región \mathcal{D}' .

3.4.2. Método de mínimo riesgo empírico (ERM)

En el siguiente apartado, se describe el método propuesto por el estudio [Artés-Rodríguez et al., 2004] para la estimación de la posición del agente a localizar, que se basa en la minimización de un coste heurístico denominado *riesgo empírico*. Al igual que con el método ML, el estimador ERM se desarrolla en primer lugar para un escenario sin censura.

■ ESCENARIO SIN CENSURA

Como se ha descrito anteriormente, en este caso el centro de fusión dispone de las lecturas de los N sensores de la red, tanto las positivas ($y_i = 1$), como las negativas ($y_i = 0$).

El coste o función de riesgo (\mathbf{R}_e) en el que se fundamenta este estimador, se crea estableciendo una recompensa o una penalización proporcional a la probabilidad de detección de cada sensor en función de la lectura realizada por éstos.

Si un sensor i no ha detectado la presencia del agente en su rango ($y_i = 0$), éste contribuye a la función de riesgo empírica con una penalización en el coste:

$$\mathbf{R}_e^i = p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha). \quad (3.38)$$

En cambio, si el sensor i -ésimo ha realizado una detección positiva del agente ($y_i = 1$), se establece una recompensa en la función de riesgo:

$$\mathbf{R}_e^i = (-p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)). \quad (3.39)$$

De esta forma, la función de riesgo penaliza las áreas en el vecindario de sensores con mayor número de detecciones negativas, y recompensa las áreas

con mayor número de detecciones positivas. Así pues, la función de riesgo se formula como:

$$\mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \sum_{i=1}^N (p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha))^{\delta[y_i]} (-p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha))^{\delta[1-y_i]}. \quad (3.40)$$

Por lo tanto, la estimación ERM del agente es aquella posición \mathbf{x}^t que minimiza la función de riesgo propuesta en (3.40).

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^t &= \arg \min_{\mathbf{x}^t} \left[\sum_{i=1}^N (p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha))^{\delta[y_i]} (-p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha))^{\delta[1-y_i]} \right] = \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}^t} \left[\sum_{i:y_i=0} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \sum_{i:y_i=1} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Sin embargo, al igual que ocurría con el estimador de máxima verosimilitud, (3.41) tampoco tiene una solución analítica, por lo que se realiza la misma aproximación que en el caso de la ML. Dicha aproximación aparece en [Artés-Rodríguez et al., 2004] para el caso exponencial al cuadrado del estimador ERM, extendiéndose en este proyecto para el resto de funciones p_d .

- **Inicialización**

Como en casos anteriores, se realiza una estimación inicial $\hat{\mathbf{x}}^t(0)$ evaluando \mathbf{R}_e en las posiciones de los N sensores de la red y seleccionando la que menor valor proporciona.

$$\hat{\mathbf{x}}^t(0) = \arg \min_{\mathbf{x}_j} \left[\sum_{i:y_i=0} p_d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i, \alpha) - \sum_{i:y_i=1} p_d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i, \alpha) \right], \quad (3.42)$$

siendo $i = 1, \dots, N_u$ y $j = 1, \dots, N_u$.

Es importante destacar que, tal y como ocurría con el estimador ML, la estimación obtenida mediante (3.42) es cercana al mínimo de la función de riesgo, e incluso puede ser tomado como estimación final si la red está suficientemente poblada.

- **Algoritmo de búsqueda**

Posteriormente, se refina el valor inicialmente logrado aplicando un descenso por gradiente. En esta ocasión, el punto buscado es un mínimo,

y no un máximo como en el caso del estimador ML, por lo que la ecuación iterativa que proporciona una estimación actualizable de la posición del agente se expresa:

$$\mathbf{x}^t(n+1) = \mathbf{x}^t(n) - \eta \nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t), \quad (3.43)$$

donde n es el número de la iteración actual, $\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t)$ representa el valor del gradiente de la función de verosimilitud, y η es el paso utilizado en cada iteración.

En este caso, también se propone optimizar el algoritmo de búsqueda utilizando un paso η adaptativo. Sin embargo, dicho paso se aplica a la búsqueda de un mínimo en lugar de un máximo:

1. Si el valor de la función de riesgo lograda en la iteración $(n+1)$ es menor que la obtenida en la iteración (n) , el valor de η aumenta para la siguiente iteración $(n+2)$.
2. Si por el contrario, el valor del riesgo en la iteración $(n+1)$ es mayor respecto a la iteración (n) , se recalcula la estimación $(n+1)$ disminuyendo η de forma recursiva, hasta que la verosimilitud obtenida disminuya respecto a la iteración (n) .

Dependiendo del tipo de función de probabilidad que estén aplicando los sensores, los gradientes de la función de riesgo empírica tienen forma diferente. A continuación se exponen la formulación de dichos gradientes cuando la p_d es de tipo exponencial al cuadrado (que es presentado por [Artés-Rodríguez et al., 2004]), lineal y exponencial². Sus demostraciones íntegras aparecen también en este caso en el Apéndice C.

◦ Probabilidad de detección de tipo lineal

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \bigg[& -\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y}_d + \mathbf{X} \mathbf{y}_{cd} + \\ & + \mathbf{x}^t \mathbf{c}^T [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_d - \mathbf{X} [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_{cd} \bigg]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

²En el caso de la función p_d sombrero cordobés no se aplica el algoritmo de búsqueda por la misma razón que en el caso del estimador de máxima verosimilitud.

- Probabilidad de detección de tipo exponencial norma 2 al cuadrado

$$\nabla R_e(\mathbf{x}^t) = 2\theta [-\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T (\mathbf{1} - \mathbf{y}) + \mathbf{X}[\mathbf{1} - \mathbf{y}]_c + \mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{y}_c]. \quad (3.45)$$

- Probabilidad de detección de tipo exponencial norma 2

$$\nabla R_e(\mathbf{x}^t) = \theta [-\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T (\mathbf{1} - \mathbf{y}) + \mathbf{X}[\mathbf{1} - \mathbf{y}]_c + \mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{y}_c]. \quad (3.46)$$

Los parámetros que aparecen en las ecuaciones de los gradientes representan:

- α Probabilidad de falsa alarma.
- β Probabilidad de pérdida de un agente situado en la misma posición que el sensor.
- r_o Rango del sensor (caso lineal).
- θ Parámetro que determina el rango del sensor (casos exponenciales).
- \mathbf{x}^t Vector columna con las coordenadas estimadas, en la iteración n , del agente a localizar.
- \mathbf{X} Matriz $2 \times N$, en la que cada columna corresponde las coordenadas \mathbf{x}_i de cada uno de los sensores de la red.
- \mathbf{y} Vector columna que contiene las lecturas de los sensores y_i .
- $\mathbf{1}$ Vector columna de N unos.
- \mathbf{d} Vector columna de elementos d_i , que se definen como:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.47)$$

- \mathbf{c} Vector columna de elementos:

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{(p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha + \beta)} & \text{si Lineal} \\ p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha & \text{si Exp. Cuadrado} \\ \frac{(p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} & \text{si Exponencial.} \end{cases} \quad (3.48)$$

- \mathbf{y}_d Vector columna con elementos $y_{di} = y_i d_i$.
- \mathbf{y}_c Vector columna con elementos $y_{ci} = y_i c_i$.
- \mathbf{y}_{cd} Vector columna con elementos $y_{cdi} = y_i c_i d_i$.

$[1 - \mathbf{y}]_d$	Vector columna con elementos $[1 - y]_{di} = d_i(1 - y_i)$.
$[1 - \mathbf{y}]_c$	Vector columna con elementos $[1 - y]_{ci} = c_i(1 - y_i)$.
$[1 - \mathbf{y}]_{cd}$	Vector columna con elementos $[1 - y]_{cdi} = c_i d_i(1 - y_i)$.

Además, de la misma forma que ocurría en otros escenarios donde p_d sigue una forma exponencial, existe una indeterminación en el gradiente si $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}_j$ (siendo \mathbf{x}_j la posición de alguno de los sensores de la red). Para resolverlo, se sustituye la contribución del sensor al gradiente por el límite de dicho término cuando \mathbf{x}^t tiende a \mathbf{x}_j (Apéndice C.3).

$$\nabla \mathbf{R}_e^j = \lim_{\mathbf{x}^t \rightarrow \mathbf{x}_j} \nabla \mathbf{R}_e^j \approx (\theta(p_d - \alpha)y_j - \theta(p_d - \alpha)(1 - y_j)) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Finalmente, en los casos en que la estimación alcanzada corresponda a un punto que no pertenezca a \mathcal{D}' , se realiza una corrección de ésta, eligiendo como estimación final el punto más cercano de la región \mathcal{D}' .

■ ESCENARIO CON CENSURA

Teniendo en cuenta solamente las lecturas de los N_u sensores que han realizado una detección positiva del agente ($y_i = 1$), la función de riesgo (3.40) queda reducida a una combinación de recompensas proporcionales a la probabilidad de detección de cada sensor que detecta al agente.

$$\mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \sum_{i=1}^N (-p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha))^{\delta[1-y_i]}. \quad (3.50)$$

De este modo, la expresión del estimador de mínimo riesgo empírico para el caso censurado se formula:

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \arg \min_{\mathbf{x}^t} \left[\sum_{i:y_i=1} -p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) \right]. \quad (3.51)$$

De nuevo se aplica la misma aproximación descrita en los casos anteriores:

● *Inicialización*

La estimación inicial $\hat{\mathbf{x}}^t(0)$ es obtenida evaluando la función de riesgo censurada en la posición de los N_u sensores que envían su lectura al fusor y escogiendo la que menor riesgo provoca.

$$\hat{\mathbf{x}}^t(0) = \arg \min_{\mathbf{x}_j} \left[\sum_{i:y_i=1} -p_d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i, \alpha) \right], \quad (3.52)$$

siendo $i = 1, \dots, N_u$ y $j = 1, \dots, N_u$.

- **Algoritmo de búsqueda**

Para los casos lineal, exponencial y exponencial al cuadrado (presentado en [Artés-Rodríguez et al., 2004]) se aplica el refinamiento de la estimación mediante un descenso de gradiente de la función de riesgo censurada. La Ecuación (3.43), sigue siendo válida para obtener el valor actualizable del mínimo buscado, así como la utilización del paso adaptativo descrito en el caso sin censura. La p_d de tipo *sombrero cordobés* es tratada como en los anteriores apartados.

Como en los casos anteriores, la demostración de las expresiones de los gradientes aparecen en el Apéndice C. La forma final de éstos es:

- Probabilidad de detección de tipo lineal

$$\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 [-\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{d} + \mathbf{X} \mathbf{c}_d]. \quad (3.53)$$

- Probabilidad de detección de tipo exponencial norma 2 al cuadrado

$$\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = 2\theta [\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X} \mathbf{c}]. \quad (3.54)$$

- Probabilidad de detección de tipo exponencial norma 2

$$\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \theta [\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X} \mathbf{c}]. \quad (3.55)$$

Los parámetros que aparecen en las ecuaciones de los gradientes representan:

- α Probabilidad de falsa alarma.
- β Probabilidad de pérdida de un agente situado en la misma posición que el sensor.
- r_o Rango del sensor (caso lineal).
- θ Parámetro que determina el rango del sensor (casos exponenciales).
- \mathbf{x}^t Vector columna con las coordenadas estimadas, en la iteración n , del agente a localizar.
- \mathbf{X} Matriz $2 \times N_u$, en la que cada columna corresponde las coordenadas \mathbf{x}_i de cada uno de los sensores de la red que han realizado una detección positiva ($y_i = 1$).
- $\mathbf{1}$ Vector columna de N_u unos.
- \mathbf{d} Vector columna de elementos d_i , que se definen como:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.56)$$

\mathbf{c} Vector columna de elementos:

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{(p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha + \beta)} & \text{si Lineal} \\ p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha & \text{si Exp. Cuadrado} \\ \frac{(p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} & \text{si Exponencial.} \end{cases} \quad (3.57)$$

\mathbf{c}_d Vector columna con elementos $c_{di} = c_i d_i$.

En el caso exponencial, también existe una indeterminación en el gradiente si $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}_j$ (siendo \mathbf{x}_j la posición de alguno de los sensores de la red). Como solución a este hecho, se sustituye la contribución del sensor al gradiente por el límite de dicho término cuando \mathbf{x}^t tiende a \mathbf{x}_j (Apéndice C.3).

$$\nabla \mathbf{R}_e^j \text{ nuevo} = \lim_{\mathbf{x}^t \rightarrow \mathbf{x}_j} \nabla \mathbf{R}_e^j \approx (\theta(p_d - \alpha)) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Por último, se aplica una corrección de la estimación en los casos necesarios.

3.4.3. Método basado en distancias

Como alternativa a los estimadores de máxima verosimilitud y mínimo riesgo empírico, se propone una regla de fusión global basada en un nuevo coste, distinto a los descritos hasta ahora, que se fundamenta en la distancia al cuadrado entre los sensores y el agente que se desea localizar. En este proyecto sólo se aplicará este estimador para el caso con censura, pero para su justificación se parte de un escenario en el que todas las lecturas, tanto negativas como positivas, son utilizadas. Además, en la parte final de la sección se propone una mejora para el estimador propuesto.

■ ESTIMADOR BASADO EN DISTANCIAS

Considerando un escenario sin censura, se propone utilizar un coste de la forma:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}^t) = \sum_{i: y_i=1} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2 - \sum_{i: y_i=0} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2. \quad (3.59)$$

En él, para cada posible punto \mathbf{x}^t donde se sitúe el agente, los sensores de la red aportan a la función coste \mathbf{C} un valor proporcional a la distancia

al cuadrado que les separa de dicho punto. Concretamente, si el sensor i -ésimo de la red ha detectado al agente ($y_i = 1$), éste contribuye al coste de manera positiva con el valor de su distancia al cuadrado, en cambio, si el sensor i -ésimo no ha detectado al agente ($y_i = 0$), el valor que aporta a la función de coste es el valor en negativo de su distancia al cuadrado. De esta forma, se recompensan las áreas con concentración de detecciones positivas y se penalizan las áreas con mayor número de detecciones negativas.

Por lo tanto, el estimador basado en distancias será aquella posición \mathbf{x}^t que minimice el coste definido en (3.59).

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \arg \min_{\mathbf{x}^t} \left[\sum_{i:y_i=1} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2 - \sum_{i:y_i=0} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2 \right]. \quad (3.60)$$

Una de las ventajas que ofrece este estimador radica en la existencia de una solución analítica del mismo (cuyo desarrollo se muestra en el Apéndice D), algo que no ocurría en los casos de los estimadores ML y ERM. Dicha solución, en forma matricial, es:

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \frac{1}{(N_u - N_c)} [\mathbf{X}\mathbf{y} - \mathbf{X}(\mathbf{1} - \mathbf{y})], \quad (3.61)$$

donde \mathbf{X} es una matriz $2 \times N$ en la que cada columna corresponde las coordenadas \mathbf{x}_i de cada uno de los sensores de la red, \mathbf{y} representa al vector columna que contiene las lecturas de los sensores y_i , $\mathbf{1}$ es un vector columna de N unos, N_u es el número de detecciones positivas del agente y N_c el de detecciones negativas.

Es importante destacar que la Ecuación (3.61) puede reescribirse como un valor proporcional de las medias de las posiciones de los sensores con distinta lectura:

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \frac{N_u}{(N_u - N_c)} \mu_{x(y_i=1)} - \frac{N_c}{(N_u - N_c)} \mu_{x(y_i=0)}. \quad (3.62)$$

donde $\mu_{x(y_i=1)}$ representa la media de las posiciones de los nodos con lecturas positivas, y $\mu_{x(y_i=0)}$ representa la media de las posiciones de los nodos con lecturas negativas.

A pesar de que el estimador tiene solución analítica, éste presenta algunas deficiencias para el proceso de localización. En primer lugar, existe una indeterminación cuando el número de lecturas positivas N_u es igual al de negativas N_c . Además, la estimación obtenida cuando el agente se sitúa en la zona central de \mathcal{D}' no es muy fiable. La razón radica en la distribución de las lecturas que se produce en esa situación. Generalmente, los sensores con lecturas positivas se localizan en torno al agente, y los que realizan una

lectura negativa se encuentran en posiciones más alejadas rodeando a los primeros. En consecuencia, las medias de ambos grupos son similares, lo que provoca que las áreas de recompensa y penalización se solapen y no se genere un mínimo nítido, distorsionándose la estimación.

Por esta razón, en este trabajo se plantea el estudio de este método basado en distancias solamente con los sensores que obtienen lecturas positivas (caso con censura), ya que al eliminar los sensores con lecturas negativas no se produce la circunstancia anterior. El coste que se utiliza en este caso es:

$$C(\mathbf{x}^t) = \sum_{i:y_i=1} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2. \quad (3.63)$$

Así pues, el estimador basado en distancias corresponderá al punto que minimice el coste definido por (3.63), cuya solución analítica aparece en la Ecuación (3.64). El desarrollo completo de este estimador se encuentra en el Apéndice D.

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \arg \min_{\mathbf{x}^t} \left[\sum_{i:y_i=1} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2 \right] = \frac{1}{N_u} \mathbf{X} \mathbf{1}, \quad (3.64)$$

donde \mathbf{X} es una matriz $2 \times N_u$ en la que cada columna corresponde las coordenadas \mathbf{x}_i de los sensores que han realizado una lectura positiva $y_i = 1$, y $\mathbf{1}$ es un vector columna de N_u unos. A pesar de existir una indeterminación si $N_u = 0$, esta circunstancia no se produce en redes densamente pobladas que son las que se estudian.

Como se puede observar, en este caso el estimador representa la media de las posiciones de los sensores con lecturas positivas. Dicha estimación resulta razonable ya que, generalmente, los sensores que detectan la presencia del agente se localizan en torno a éste.

El último paso que se realiza en el proceso de localización es una corrección de la estimación final en los casos en los que dicha estimación no corresponda a una punto de la región \mathcal{D}' .

■ MEJORA DEL ESTIMADOR BASADO EN DISTANCIAS

Adicionalmente, se propone una mejora del estimador propuesto en la Ecuación (3.64).

Esta expresión, tal y como se ha comentado anteriormente, es una función media de la posición de los sensores con lecturas positivas. En general, la media es una función en la que los datos atípicos provocan una gran distorsión del valor final de dicha media. En el caso de estudio, la estimación obtenida

es muy sensible a la aparición de sensores que realicen una detección positiva y que estén situados en posiciones alejadas al área donde mayoritariamente se ha detectado al agente. La aparición de estos sensores está relacionada la fiabilidad y precisión de los mismos, que en este proyecto son modeladas con los parámetros α , β , θ y r_o .

La mejora realizada trata de eliminar estos sensores “atípicos” para lograr una estimación más ajustada a la posición real del agente. Este proceso se resume en tres pasos:

1. Se realiza una estimación inicial $\hat{\mathbf{x}}^t(0)$ aplicando el estimador basado en distancias de la Ecuación (3.64).
2. La estimación $\hat{\mathbf{x}}^t(0)$ se establece como el centro de una nueva región \mathcal{D}'' , que satisface $\mathcal{D}'' \subseteq \mathcal{D}$. Dicha región, es definida mediante el parámetro r_e'' , que en el caso de regiones circulares representa el radio de la región \mathcal{D}'' , y en el caso de regiones cuadradas representa la longitud del semilado de dicha región. Este parámetro r_e'' se establece de igual forma en ambos casos, siendo su valor la menor distancia entre $\hat{\mathbf{x}}^t(0)$ y el límite de la región de despliegue de los sensores \mathcal{D} , tal y como se puede observar en la Figura 3.12.

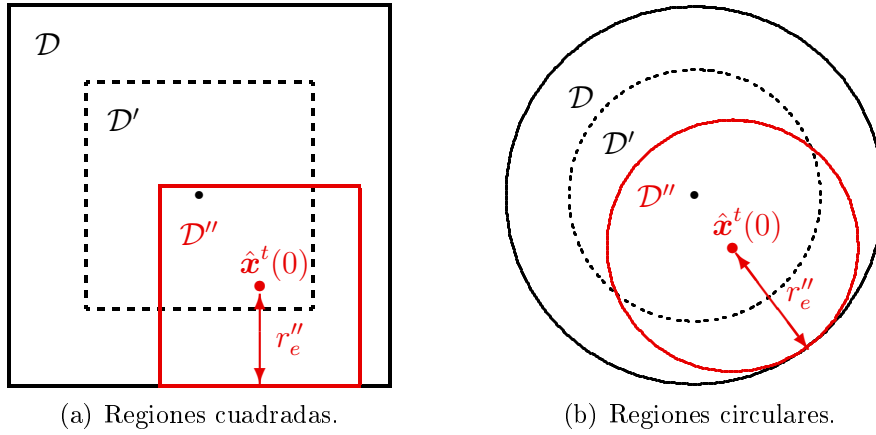


Figura 3.12: Representación de la región \mathcal{D}'' para la mejora propuesta del método basado en distancias.

3. Finalmente, se aplica el estimador basado en distancias pero utilizando únicamente los N_u'' sensores con lecturas positivas situados en \mathcal{D}'' .

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \arg \min_{\mathbf{x}^t} \left[\sum_{\substack{i: y_i=1 \\ \mathbf{x}_i \in \mathcal{D}''}} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2 \right] = \frac{1}{N_u''} \mathbf{X} \mathbf{1}. \quad (3.65)$$

siendo \mathbf{X} es una matriz $2 \times N_u''$ en la que cada columna corresponde las coordenadas \mathbf{x}_i de los sensores que han realizado una lectura positiva ($y_i = 1$) y que se encuentran situados en la región \mathcal{D}'' , y $\mathbf{1}$ es un vector columna de N_u'' unos.

Al igual que en todos los métodos anteriores, se aplica una corrección de la estimación final si es necesario.

Capítulo 4

Resultados

Una vez establecidos los fundamentos teóricos de la localización distribuida de objetivos, se van a presentar los resultados obtenidos en este Proyecto Final de Carrera. Mediante la realización de simulaciones de redes de sensores que implementan el proceso de localización, se comprobará el rendimiento de los métodos de estimación estudiados, así como la influencia que sobre ellos tienen los diferentes parámetros de diseño.

Es necesario recordar que, en el Capítulo 3, se han descrito un conjunto de factores que determinan el diseño del proceso de localización distribuida de objetivos, y consecuentemente, las prestaciones de éste. Por lo tanto, llegados a este punto, resulta necesario recapitular los mismos:

1. **Tipo de sensores:** Las características de los sensores son determinadas por los parámetros α , β , θ y r_o .
2. **Probabilidad de detección:** *Sombrero cordobés*, lineal, exponencial norma 2 al cuadrado y exponencial norma 2.
3. **Región de despliegue:** Circulares y cuadradas.
4. **Tipo de despliegue:** Aleatorio y ordenado en rejilla.
5. **Densidad de sensores:** Determinado mediante el parámetro ρ_s .
6. **Método de estimación:**
 - Máxima verosimilitud sin censura (denotado como ML en las simulaciones).
 - Máxima verosimilitud con censura, usando sólo lecturas positivas (denotado como MLc).
 - Mínimo riesgo empírico sin censura (denotado como ERM).

- Mínimo riesgo empírico con censura (denotado como ERMc).
- Método basado en distancia, sólo con detecciones positivas (denotado como Dist).
- Mejora del método basado en distancia, también sólo para el caso con censura (denotado como DistM).

Cada combinación de valores de estos parámetros crea un escenario distinto de localización. Debido a la gran cantidad de combinaciones posibles, resulta inabordable plantear un estudio exhaustivo de todos los casos. Por este motivo, las simulaciones realizadas muestran únicamente los escenarios más representativos, para así lograr una mejor comprensión de los resultados.

Cabe indicar que, para conseguir resultados de prestaciones fiables, es necesario efectuar un número elevado de realizaciones independientes de las simulaciones (método Monte Carlo), ya que existe un importante componente aleatorio en dicho proceso de simulación (posición del agente, lecturas de sensores,...).

De forma general, se escoge como parámetro de medida de la precisión de los métodos de estimación la función de error:

$$error = d(\mathbf{x}_t, \hat{\mathbf{x}}_t), \quad (4.1)$$

que representa distancia euclídea entre la posición real del agente y la posición estimada por la red de sensores.

En el caso de las simulaciones con múltiples realizaciones independientes, este parámetro se expresa como la media de dichos errores:

$$error = \sum_{k=1}^M \frac{d(\mathbf{x}_t^k, \hat{\mathbf{x}}_t^k)}{M}. \quad (4.2)$$

Además, para una mayor generalidad de los resultados, las medidas de los parámetros son expresadas en unidades normalizadas. Así, todos los valores que representan distancia (posición, error, rango, etc.) se presentan en unidades de distancia, los de área en unidades de área, y la densidad de sensores en número de sensores por unidad de área.

Por lo tanto, el presente capítulo se estructura con una primera sección, donde se describe la simulación y escenarios empleados para obtener los resultados y se muestran ejemplos de dicho proceso de simulación; y en cinco secciones posteriores, donde se presenta la comparación de las prestaciones de los métodos estudiados bajo diferentes criterios de diseño.

4.1. Simulación y escenarios del proceso de localización

Como paso previo al análisis de las prestaciones del proceso de localización, en esta sección se describe, paso a paso, la simulación diseñada para recrear el comportamiento de redes de sensores. Junto con esta descripción, se detalla también el conjunto de valores que se le asigna a cada uno de los parámetros de diseño para realizar el posterior estudio comparativo de prestaciones.

Las etapas de las que consta la simulación realizada pueden agruparse en cuatro: elección de sensores, despliegue de la red, generación de lecturas y generación de la estimación.

4.1.1. Definición de las clases de sensores

En primer lugar, resulta necesario elegir qué tipos de sensores son utilizados para crear la red. Como se ha descrito anteriormente, los avances en comunicaciones inalámbricas y electrónica han permitido el desarrollo de sensores con una alta capacidad de procesamiento, bajo consumo y pequeño tamaño. Sin embargo, el coste de los mismos representa un factor crucial para diseñar la red, ya que, generalmente, sensores con una alta precisión y capacidad conllevan un alto coste.

Por este motivo, en este trabajo se plantea estudiar tres clases diferentes de sensores mediante la definición de los parámetros α , β y rango de actuación (establecido por r_o o θ según el tipo de p_d).

Es necesario indicar que dicho rango de actuación (o distancia a partir de la que los sensores entran en falsa alarma) es diferente para cada tipo de probabilidad de detección. Para fijar un criterio común, se establece que la p_d de tipo *sombrero cordobés* sea la función de referencia sobre la que se define este rango. De esta forma, los rangos de los demás tipos de probabilidades se obtienen aplicando el criterio de equivalencia entre probabilidades descrito en la Sección 3.2.

Así pues, las clases de sensores que se definen a priori son:

1. **CLASE A**

Estos sensores son los que ofrecen un mejor rendimiento para la localización de agentes. Para lograrlo, sus parámetros se establecen:

- Baja probabilidad de falsa alarma $\alpha = 0.001$.
- Baja probabilidad de pérdida $\beta = 0.001$.

- Pequeño rango de actuación. Para una p_d de tipo *sombrero cordobés* $r_o = r_e - r_e'$.

Este valor se fija para que la probabilidad de detección de un sensor i -ésimo de la red, situado en el punto más alejado del campo de sensores \mathcal{D} , alcance el valor de falsa alarma en el punto más cercano de la zona de detección del agente \mathcal{D}' , considerando que la p_d es de tipo *sombrero cordobés*¹. Una representación gráfica de este hecho aparece en la Figura 4.1.

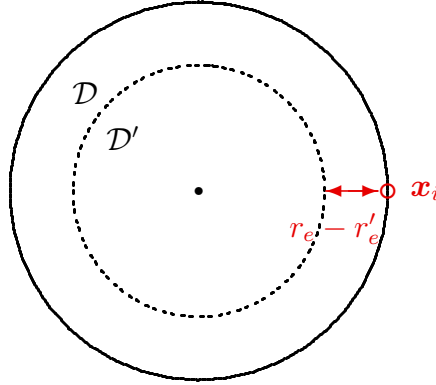


Figura 4.1: Representación del rango de un sensor de la Clase A.

2. CLASE B

Esta clase de sensores son los que ofrecen unas prestaciones intermedias de localización. Sus parámetros se fijan como:

- Probabilidad de falsa alarma con valor intermedio $\alpha = 0.05$.
- Probabilidad de pérdida con valor intermedio $\beta = 0.05$.
- Rango de actuación intermedio. Para una p_d de tipo *sombrero cordobés* $r_o = r_e$.

Los valores de θ o r_o , que fijan el rango, se establecen de tal manera que la p_d de tipo *sombrero cordobés* de un sensor i -ésimo situado en el límite del campo de sensores \mathcal{D} , alcance el valor de falsa alarma en el centro de la zona de detección del agente \mathcal{D}' , tal y como se observa en la Figura 4.2.

3. CLASE C

Son los sensores que ofrecen unas prestaciones de localización peores de las tres clases definidas, y sus parámetros se establecen:

¹De forma general, para el cálculo de r_o la región circular se toma como escenario de referencia, por lo que dicho valor se calcula sobre una región circular y se mantiene para la región cuadrada equivalente.

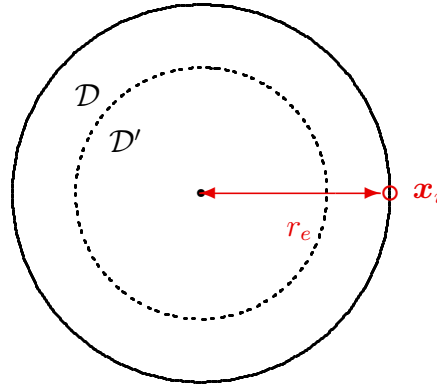


Figura 4.2: *Representación del rango de un sensor de la Clase B.*

- Alta probabilidad de falsa alarma $\alpha = 0.1$.
- Alta probabilidad de pérdida $\beta = 0.1$.
- Rango de actuación grande. Para una p_d de tipo *sombrero cordobés* $r_o = r_e + re'$.

De igual forma, este valor representa el caso más desfavorable de un sensor i -ésimo situado en el límite del campo de sensores \mathcal{D} , y su probabilidad de detección de tipo *sombrero cordobés* alcanza el valor de falsa alarma en el punto más alejado de la zona de detección del agente \mathcal{D}' , tal y como se observa en la Figura 4.3.

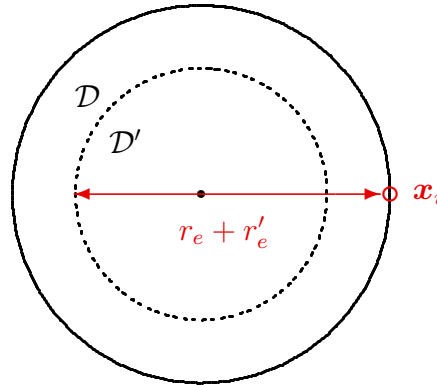


Figura 4.3: *Representación del rango de un sensor de la Clase C.*

Con estas definiciones, es posible establecer un compromiso coste-precisión, evaluando la diferencia de precisión entre las clases de sensores y eligiendo la que mejor se adapte a la aplicación que implementa la localización.

Por otro lado, resulta necesario justificar la elección de r_o y θ realizada para cada clase, ya que en un principio puede resultar paradójica. En aplicaciones de detección distribuida, cuanto mayor es el rango de los sensores

mejores son las prestaciones obtenidas, porque, generalmente, un mayor rango implica que un mayor número de sensores detectan al agente, y por lo tanto una mayor certeza de que existe un agente presente en la red.

Sin embargo, no siempre se produce la misma circunstancia en el caso de la localización distribuida. El hecho de que una gran cantidad de sensores de la red realicen una lectura positiva del agente puede provocar un desplazamiento del máximo o mínimo de la función de coste que se estudia, causando una distorsión de la estimación.

Este fenómeno se muestra claramente en la Sección 4.5.3, que estudia la precisión del proceso de estimación en función del rango de los sensores de la red.

4.1.2. Despliegue de los sensores

Una fase importante en el diseño de una red de sensores, consiste en el despliegue de los mismos en la región de estudio. Es necesario conocer qué tipo de región se ha de cubrir, de qué forma se sitúan los sensores en dicha región y el número de ellos que conforman dicha red. Éste último factor resulta crucial, ya que un mayor número de sensores implica un coste mayor.

Los cuatro escenarios utilizados (Figura 4.4 y Figura 4.5) surgen como la combinación del tipo de región estudiada y la colocación de los sensores en ella.

1. *Escenario I*: Región cuadrada con despliegue de sensores aleatorio mediante una distribución uniforme.
2. *Escenario II*: Región cuadrada con despliegue ordenado de tipo rejilla.

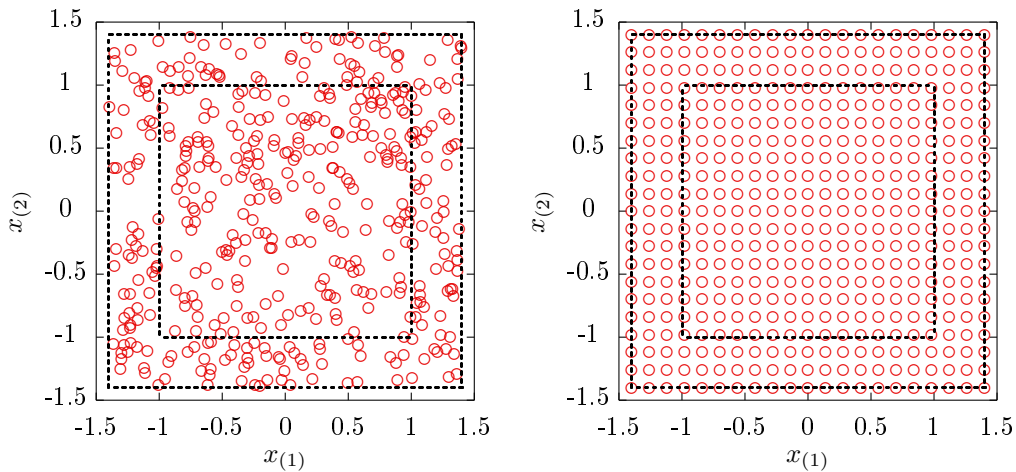


Figura 4.4: *Escenarios I y II con regiones \mathcal{D} y \mathcal{D}' cuadradas, y despliegues aleatorio y ordenado en rejilla, respectivamente.*

3. *Escenario III*: Región circular con despliegue de sensores aleatorio mediante una distribución uniforme.
4. *Escenario IV*: Región circular con despliegue ordenado de tipo rejilla.

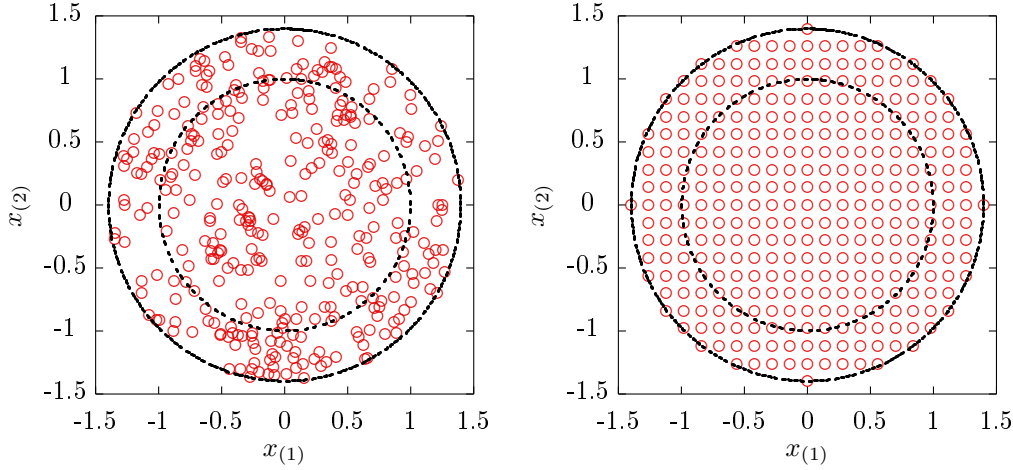


Figura 4.5: Ejemplo de escenarios III y IV con regiones \mathcal{D} y \mathcal{D}' circulares, y despliegues aleatorio y ordenado en rejilla, respectivamente.

Es necesario definir un criterio de comparación para que el análisis de las prestaciones de los diferentes escenarios sea válido. Para ello, se establece que un escenario A es equivalente a otro B si:

- Encierran el mismo área en sus regiones \mathcal{D} y \mathcal{D}' :

$$Area_{\mathcal{D}}^A = Area_{\mathcal{D}}^B \quad \text{y} \quad Area_{\mathcal{D}'}^A = Area_{\mathcal{D}'}^B. \quad (4.3)$$

- Tienen el mismo número de sensores. Si las áreas son iguales, es equivalente a que la densidad de sensores por unidad de área ρ_s sea la misma.

Atendiendo a este criterio, a continuación se fijan las dimensiones de las regiones circulares y cuadradas que se emplearán en el resto del estudio. Para tal fin, se establece como escenario de referencia una región de tipo circular cuya zona \mathcal{D}' sea un círculo de radio normalizado $r'_e = 1$. La región \mathcal{D} de dicho escenario, tal y como se detalló anteriormente, es recomendable que sea de mayor tamaño que \mathcal{D}' para mejorar la localización del objetivo, pero, ¿cuál debe ser su valor exacto?

Para comprobar dicha mejora y establecer un valor del radio r_e adecuado, en la Figura 4.6 se realiza una comparativa del efecto de la relación r_e/r'_e sobre el error de localización con cada una de las clases de sensores definidas en el apartado anterior. Los parámetros empleados en esta simulación se muestran a continuación.

- *Región/Despliegue*: Escenario III (circular, aleatorio) $r'_e = 1$ y $\rho_s = 60$.
- *Sensores*: Según la definición del apartado anterior, el rango de los sensores depende de r_e , que en esta simulación varía su valor en cada punto. Sin embargo, para comprobar el efecto del aumento del tamaño de la región \mathcal{D} , dichos rangos deben ser constantes, por lo que se fijan para el caso inicial $r_e = r'_e = 1$, y se mantienen en toda la simulación².

	Clase A	Clase B	Clase C
α	0.001	0.05	0.1
β	0.001	0.05	0.1
r_o (somb. cordobés)	0.25	1	2

Tabla 4.1: *Parámetros de las clases de sensores utilizadas en la simulación.*

- *Prob. detección*: Exponencial al cuadrado, con valores de θ equivalentes al rango de cada clase: $\theta_A = 16$, $\theta_B = 0.999$ y $\theta_C = 0.25$.
- *Estimador*: ML sin censura.
- *Número de realizaciones*: 8000.

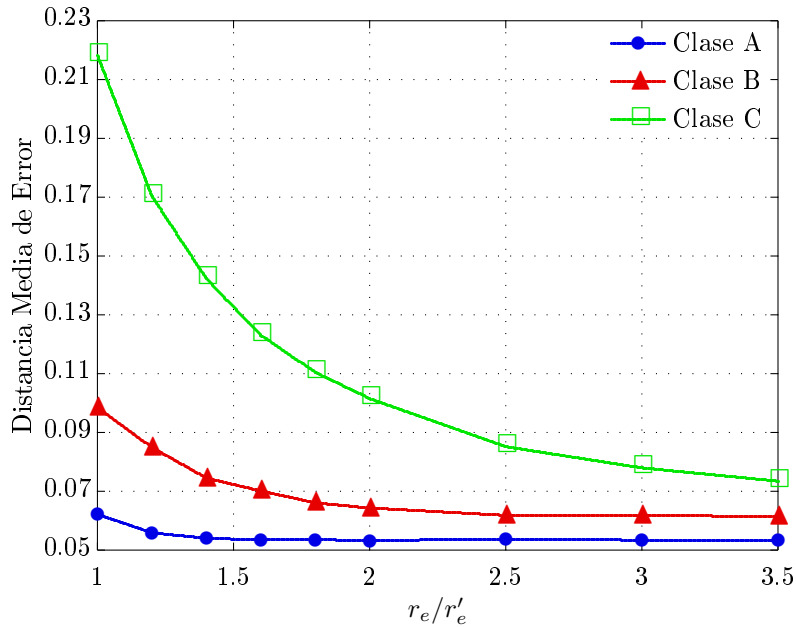


Figura 4.6: *Error de localización de cada una de las clases de sensores (expresado en distancia media) en función de la relación r_e/r'_e .*

²Los sensores de Clase A son una excepción y se establece su rango con un valor pequeño pero no el dado por la definición para $r_e = r'_e = 1$, ya que en ese caso $r_o = 0$.

Como se puede observar en la Figura 4.6, aumentar el radio de la región \mathcal{D} (manteniendo la densidad de sensores constante) mejora la localización hasta un cierto valor de r_e , en el cual el error se estabiliza. Este hecho se debe a que, cuando la separación entre los límites de las regiones \mathcal{D} y \mathcal{D}' es superior al rango de los sensores, los sensores situados en las posiciones más alejadas no contribuyen en la localización del agente, ya que éste se encuentra siempre fuera de sus rangos de actuación y sólo lo detectan debido a falsas alarmas.

Consecuentemente, el valor ideal de r_e corresponde con el punto donde se alcanza el límite del error, para así obtener la mayor precisión posible y no desplegar sensores redundantes que no contribuyen a la localización.

En las clases de sensores que se van a estudiar, la definición del rango para cada una de ellas (realizada en el apartado anterior) provoca que estas clases siempre se encuentren en la misma situación independientemente del valor de r_e . Para la Clase A, la red siempre se encuentra en el punto de estabilización del error, ya que el rango de sus sensores es igual a la distancia entre \mathcal{D} y \mathcal{D}' . Sin embargo, para la Clase B y Clase C, nunca se alcanza dicho punto del límite de mejora, porque sus rangos, por definición, siempre son mayores que la distancia entre \mathcal{D} y \mathcal{D}' .

Por lo tanto, en este caso, para elegir adecuadamente r_e es suficiente con escoger un valor mayor que r'_e , y así conseguir que los sensores de Clase A tengan un rango diferente a 0. Sin embargo, se debe evitar un r_e demasiado grande, para no aumentar excesivamente la carga computacional de la simulación (a igual densidad ρ_s , mayor región de despliegue implica un número mayor de sensores en la red). El valor escogido para el escenario de referencia es $r_e = 1.5$. Un resumen de las dimensiones de las regiones circulares y cuadradas utilizadas en el resto del estudio se muestran en la Tabla 4.2.

	Circular	Cuadrado
r'_e	1	0.886
r_e	1.5	1.329

Tabla 4.2: Dimensiones de las regiones circulares y cuadradas utilizadas en las simulaciones.

4.1.3. Generación de lecturas de los sensores

Tal y como se describió en apartados anteriores, la localización puede resumirse en la resolución de dos problemas: uno de detección a nivel local de la presencia del agente en la región de influencia de cada sensor, y un segundo problema de estimación a nivel global en el centro de fusión. En este apartado, se muestra un ejemplo de como se realiza la simulación de éste

primer problema (generación de lecturas), y como influye en él la probabilidad de detección utilizada.

Como paso previo a la generación de lecturas, se establece una posición aleatoria para el agente a localizar mediante una distribución uniforme sobre la región \mathcal{D}' . Posteriormente, se generan las lecturas en función del tipo de p_d utilizada, y del valor de dicha probabilidad para la distancia que separa al objetivo de cada sensor.

El ejemplo presentado en este apartado muestra ejemplos de las lecturas obtenidas para cada tipo de p_d en un mismo escenario. Dicho escenario se define como:

- *Región/Despliegue*: Escenario IV (circular, despliegue ordenado) con $r_e = 1.5$, $r'_e = 1$, y $\rho_s = 150$.
- *Sensores*:
 - Probabilidad falsa alarma $\alpha = 0.05$.
 - Probabilidad de pérdida $\beta = 0.05$.
 - Rango de actuación $r_o = 0.5$.
- *Probabilidad de detección*: Se definen cuatro probabilidades de detección equivalentes, siguiendo el procedimiento descrito en el Apartado 3.2, para que las lecturas obtenidas con cada tipo de p_d puedan ser comparadas. Tomando como referencia la p_d de tipo *sombrero cordobés*, y estableciendo que su $r_o = 0.5$, mediante las ecuaciones (3.10), (3.11) y (3.12) de la Página 39, se obtienen el resto de parámetros. Por lo tanto:

<i>Sombrero</i>	<i>Lineal</i>	<i>Exponencial 2</i>	<i>Exponencial</i>
$r_o = 0.5$	$r_o = 0.866$	$\theta = 3.998$	$\theta = 2.822$

Tabla 4.3: Valores de los parámetros r_o y θ para cada tipo de p_d .

La representación de estas probabilidades de detección aparecen en la Figura 4.7.

- Agente presente en posición $\mathbf{x}^t = (0, 0)$.

En primer lugar, en la Figura 4.8, se muestra el caso de una probabilidad *sombrero cordobés*. Como se observa, los sensores que detectan al agente se concentran en un área circular de radio 0.5 en torno a dicho agente. Esto se debe a que si el agente a detectar está dentro de rango de actuación de los sensores, éstos poseen una probabilidad de detección constante y mucho mayor que los sensores separados del agente una distancia mayor que dicho

rango. Éstos últimos sólo detectarán al agente debido a falsas alarmas. Además, también existen sensores que, aun teniendo al agente en su rango de actuación, no lo detectan, a causa de la probabilidad de pérdida β .

Por otra parte, un ejemplo de las lecturas obtenidas utilizando una p_d lineal se encuentra en la Figura 4.9. En este caso, el valor probabilidad de detección decrece de forma lineal dentro del rango de acción del sensor. Esto provoca que, respecto al caso anterior, aparezcan un mayor número de sensores que realizan una detección negativa en la zona cercana al agente, ya que la probabilidad de no detección aumenta con la distancia. Al igual que antes, aparecen sensores que detectan al agente debido a falsas alarmas, a causa de que éste se encuentra fuera de sus rangos de actuación.

El caso de una probabilidad de tipo exponencial al cuadrado se muestra en la Figura 4.10. Como se observa, existe una mayor concentración de lecturas positivas en las cercanías del agente que en caso lineal, debido a que la función exponencial al cuadrado tiene un decrecimiento más lento de la probabilidad en esa región. En regiones más lejanas, este decrecimiento es mayor, provocando la generación de más sensores con lecturas negativas.

Por último, en la Figura 4.11 se representan la lecturas obtenidas para una p_d de tipo exponencial. En la zona próxima al sensor, el valor de la probabilidad de detección cae de forma más rápida en este caso, aunque el rango es el mayor de las cuatro p_d estudiadas. Esto provoca una mayor dispersión de las lecturas positivas, apareciendo un mayor número de sensores que detectan al agente en posiciones muy alejadas de éste.

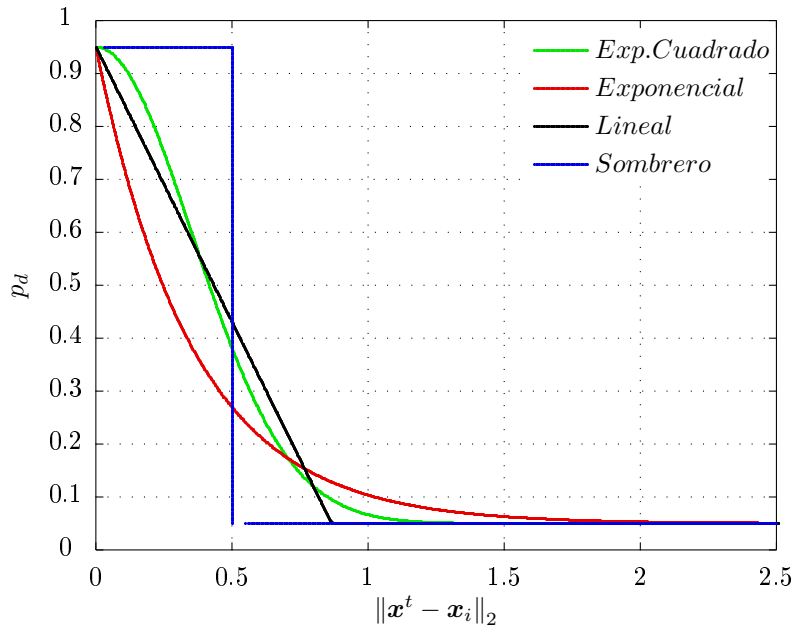


Figura 4.7: Probabilidades de detección equivalentes utilizadas para la generación de lecturas.

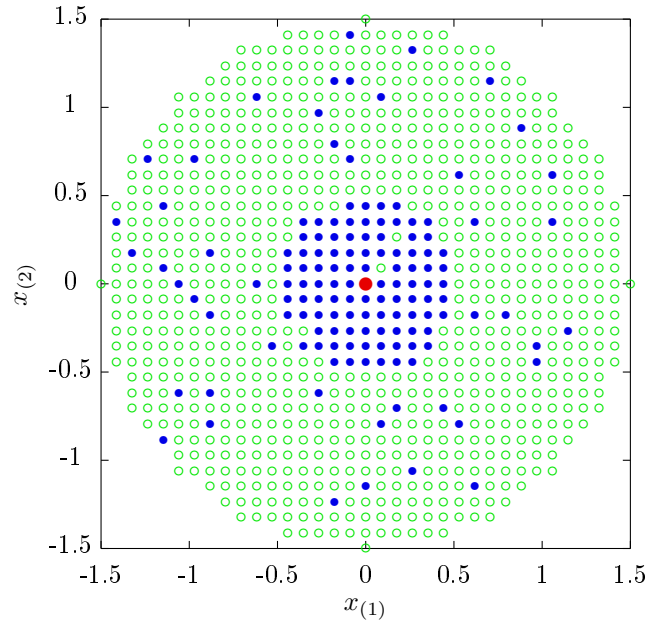


Figura 4.8: *Ejemplo de generación de lecturas para una p_d de tipo sombre-ro cordobés. El agente a detectar (\bullet) se encuentra situado en la posición $\mathbf{x}^t = (0,0)$, representándose mediante (\bullet) los sensores que detectan al agente, y mediante (\circ) los que realizan una detección negativa del mismo.*

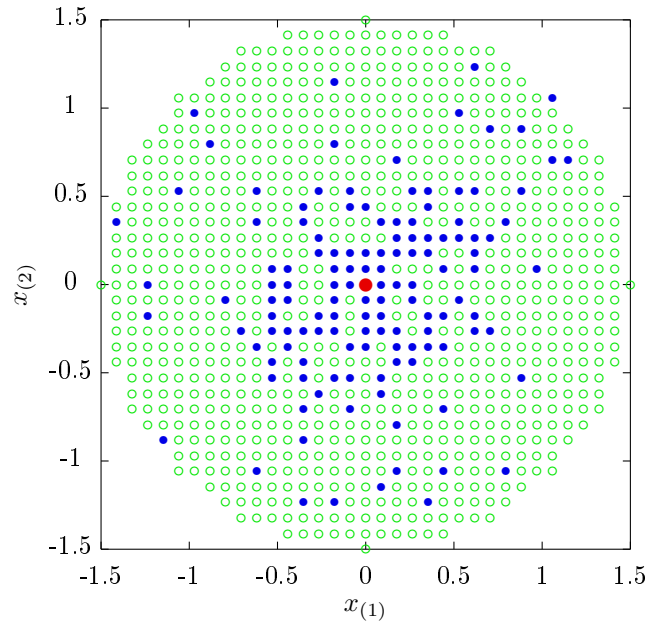


Figura 4.9: *Ejemplo de generación de lecturas para una p_d de tipo lineal. El agente a detectar (\bullet) se encuentra situado en la posición $\mathbf{x}^t = (0,0)$, representándose mediante (\bullet) los sensores que detectan al agente, y mediante (\circ) los que realizan una detección negativa del mismo.*

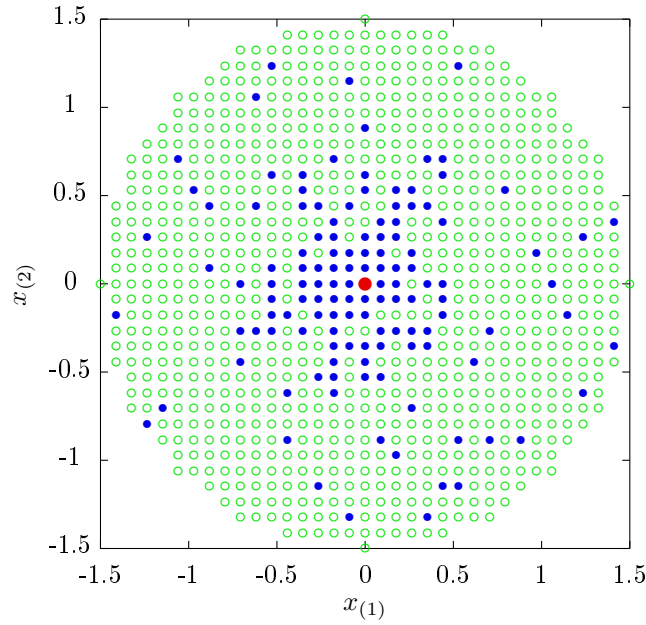


Figura 4.10: *Ejemplo de generación de lecturas para una p_d de tipo exponencial al cuadrado. El agente a detectar (\bullet) se encuentra situado en la posición $\mathbf{x}^t = (0,0)$, representándose mediante (\bullet) los sensores que detectan al agente, y mediante (\circ) los que realizan una detección negativa del mismo.*

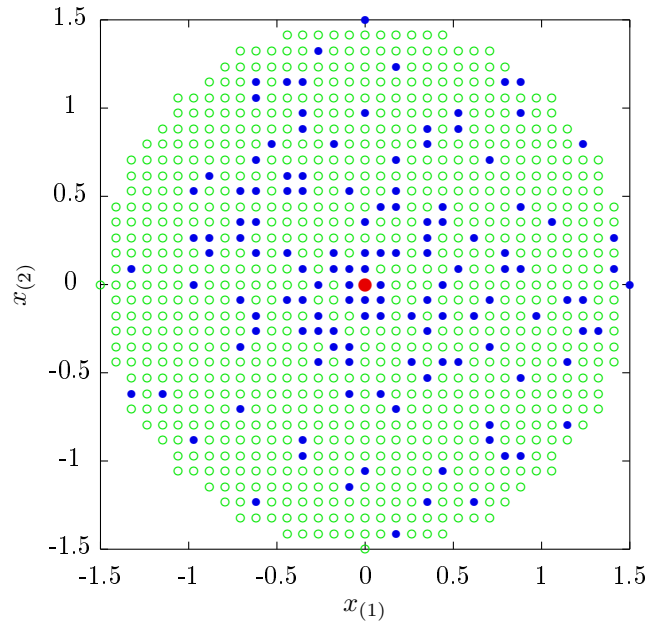


Figura 4.11: *Ejemplo de generación de lecturas para una p_d de tipo exponencial. El agente a detectar (\bullet) se encuentra situado en la posición $\mathbf{x}^t = (0,0)$, representándose mediante (\bullet) los sensores que detectan al agente, y mediante (\circ) los que realizan una detección negativa del mismo.*

4.1.4. Generación de la estimación en función de la regla de fusión

En este apartado, se presenta el último paso de la simulación de la localización. En él se recrea, mediante un ejemplo, el proceso de estimación a nivel global para cada uno de las reglas de fusión utilizadas. De esta forma, se pretende facilitar la comprensión del trabajo realizado en este Proyecto Fin de Carrera.

Para una mejor explicación del funcionamiento de los métodos, en todas las simulaciones presentadas a continuación se ha utilizado el mismo escenario, que es caracterizado por:

- *Región/Despliegue:* Escenario tipo III (región circular, despliegue aleatorio) con $r_e = 1.5$, $r'_e = 1$ y $\rho_s = 60$.
- *Sensores:* En este caso se utilizan los sensores de prestaciones intermedias Clase B. Sus características son:
 - Probabilidad falsa alarma $\alpha = 0.05$.
 - Probabilidad de pérdida $\beta = 0.05$.
 - Rango de actuación 1.5 (p_d sombrero cordobés).
- *Prob. detección:* Exponencial norma 2 al cuadrado con $\theta = 0.44$ (equivalente a r_o (somb. cord.) = 1.5).
- *Método de estimación:* Para mostrar el proceso localización no se realiza un ejemplo de simulación de todos los estimadores estudiados, sólo se presenta un estimador por método de estimación:
 - ML (con todas las lecturas).
 - ERM (con todas las lecturas).
 - Dist (con censura).
 - DistM (con censura).

Una vez desplegados los sensores de la red, se genera de forma aleatoria la posición del agente a localizar. En este caso es $\mathbf{x}^t = (-0.074, 0.536)$.

Posteriormente se obtienen las lecturas de todos los sensores, tal y como se muestra en la Figura 4.12.

Cada método de estimación sigue un proceso diferente, los cuales se detallan a continuación.

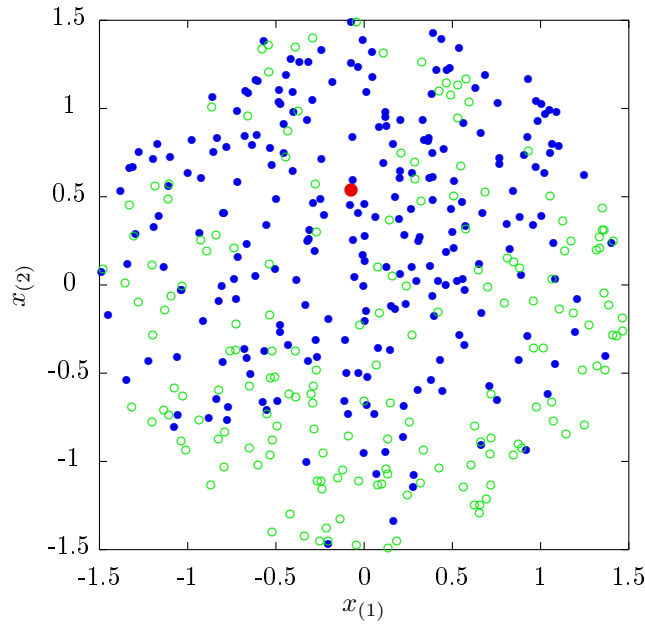


Figura 4.12: *Generación de las lecturas de los sensores para el escenario propuesto. El agente a localizar (●) se sitúa en la posición $\mathbf{x}^t = (-0.074, 0.536)$ y las lecturas (● positivas y ○ negativas) aparecen distribuidas por el campo de sensores.*

• Estimador de máxima verosimilitud

El estimador ML, maximiza la función de verosimilitud creada a partir de las lecturas recibidas en el fusor. La forma de dicha función para este caso concreto puede observarse en la Figura 4.13. En ella, se aprecia claramente un máximo en la zona de mayor concentración de sensores con lecturas positivas.

Debido a que el estimador no tiene solución analítica, en primer lugar se realiza una aproximación de la estimación (Figura 4.14) como aquella posición del sensor i -ésimo de la red que genera un valor más grande de la función de verosimilitud. Su valor es $\hat{\mathbf{x}}^t(0) = (-0.064, 0.597)$.

La aproximación hallada es mejorada mediante un algoritmo iterativo de búsqueda por ascenso de gradiente. En la Figura 4.15 aparece representada la evolución de dicho algoritmo de búsqueda en función del número de iteraciones utilizadas, y como, según aumentan el número de éstas, las estimaciones obtenidas tienen un valor mayor de verosimilitud (la estimación se acerca al punto máximo). En el instante, en el que la verosimilitud se estanca, el algoritmo se detiene.

Finalmente, en la Figura 4.16, se muestra la estimación final lograda. En este caso, el valor obtenido es $\hat{\mathbf{x}}^t = (-0.126, 0.615)$.

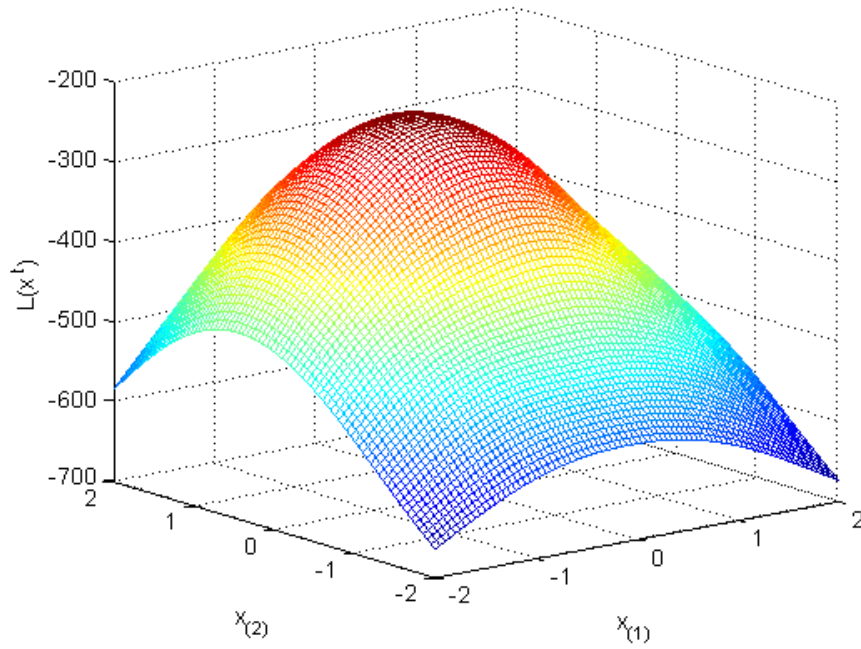


Figura 4.13: *Función de verosimilitud generada a partir de las lecturas y posiciones de los sensores de la red.*

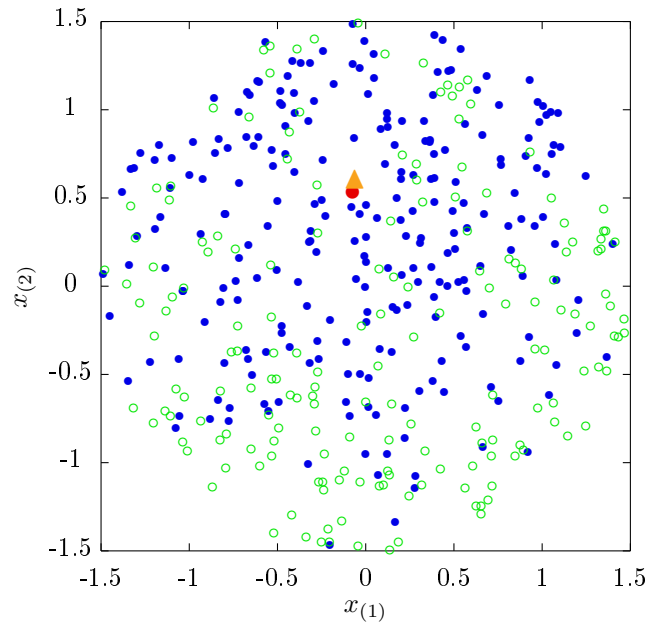


Figura 4.14: *Representación de la estimación inicial lograda para el método ML. Dicha estimación (\blacktriangle) toma el valor $\hat{\mathbf{x}}^t(0) = (-0.064, 0.597)$ en este caso.*

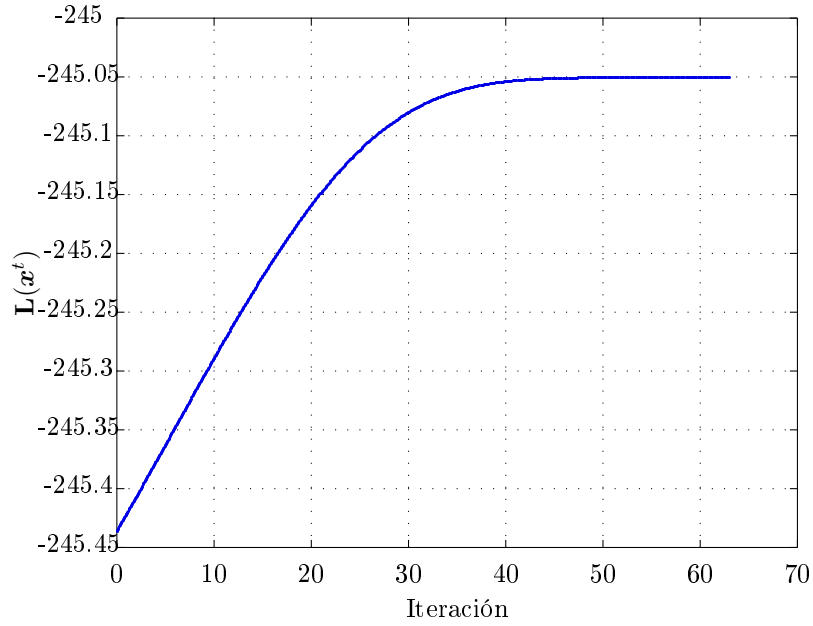


Figura 4.15: *Evolución de la verosimilitud de la estimación obtenida en cada iteración del algoritmo de búsqueda.*

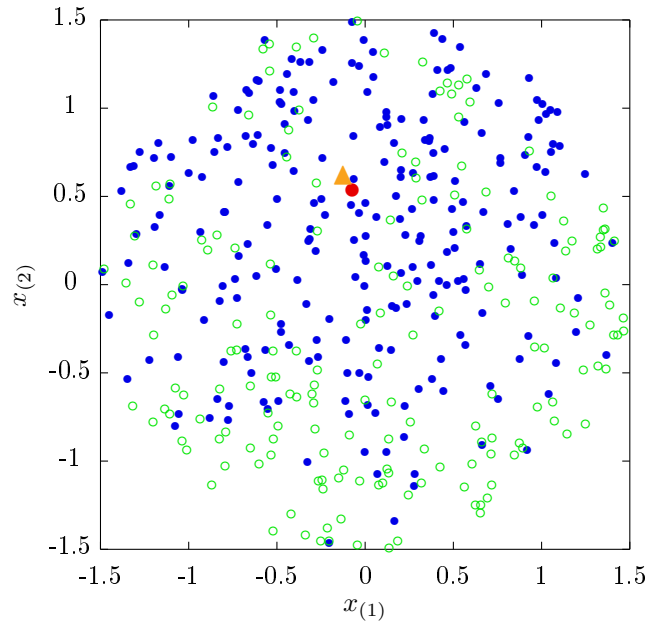


Figura 4.16: *Representación de la estimación final lograda para el método ML. Dicha estimación (\blacktriangle) toma el valor $\hat{\mathbf{x}}^t = (-0.126, 0.615)$ en este caso.*

• Estimador de mínimo riesgo empírico

El segundo estimador estudiado se define como la posición del espacio que minimiza la función de riesgo empírico. En este escenario concreto, el riesgo empírico generado mediante las lecturas y_i y las posiciones \mathbf{x}_i de los sensores se muestra en la Figura 4.17. Como se puede apreciar, existe un mínimo absoluto situado en la zona de mayor concentración de sensores con detección positiva del agente.

Al igual que en el estimador ML, no existe solución analítica del estimador ERM, por lo que se realiza una aproximación inicial. Dicha aproximación, que se representa en la Figura 4.18, es la posición del sensor de la red con menor valor de la función de riesgo empírico. Su valor en este caso es $\hat{\mathbf{x}}^t(0) = (-0.065, 0.840)$.

Para refinar la estimación se utiliza un algoritmo iterativo de descenso por gradiente. En la Figura 4.19, se observa la evolución de este algoritmo mediante la representación del riesgo de la estimación obtenida en cada iteración. Cuando dicho valor deja de disminuir, el algoritmo se detiene y se obtiene la estimación final ERM (Figura 4.20). Su valor es $\hat{\mathbf{x}}^t = (-0.080, 0.760)$.

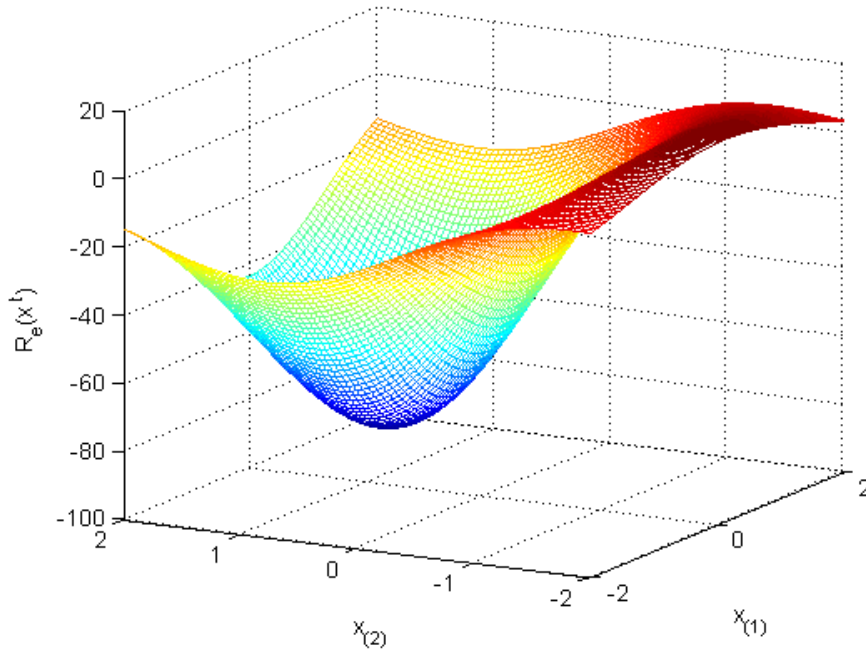


Figura 4.17: *Función de riesgo empírico generada a partir de las lecturas y posiciones de los sensores de la red.*

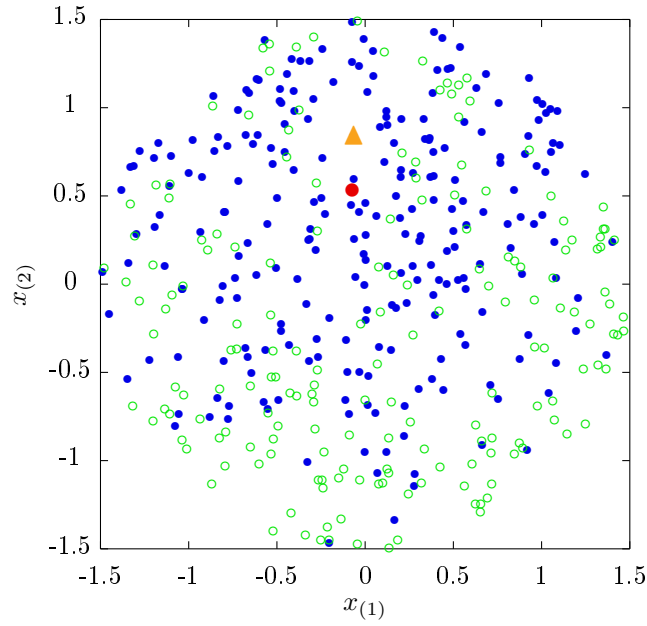


Figura 4.18: Representación de la estimación inicial lograda para el método ERM. Dicha estimación (\blacktriangle) toma el valor $\hat{\mathbf{x}}^t(0) = (-0.065, 0.840)$ en este caso.

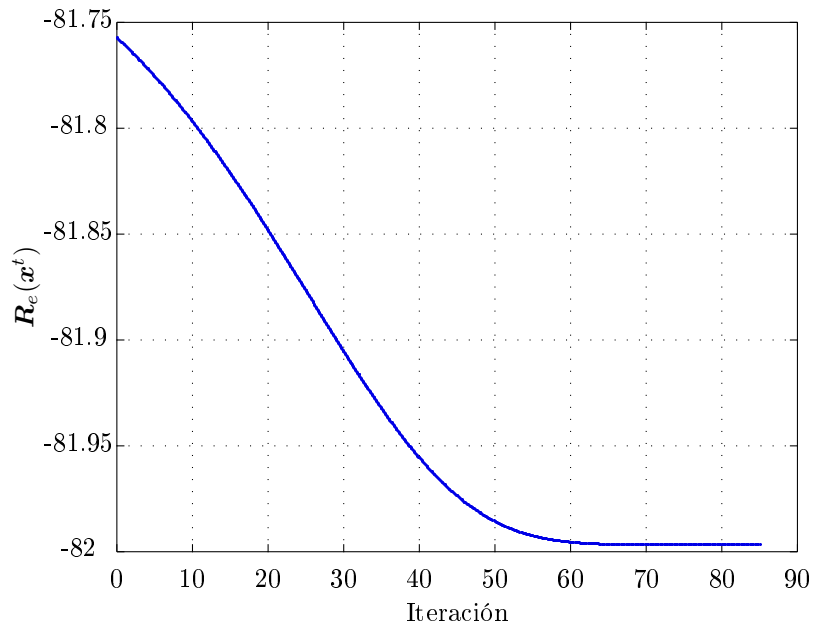


Figura 4.19: Evolución del riesgo de la estimación obtenida en cada iteración del algoritmo de búsqueda.

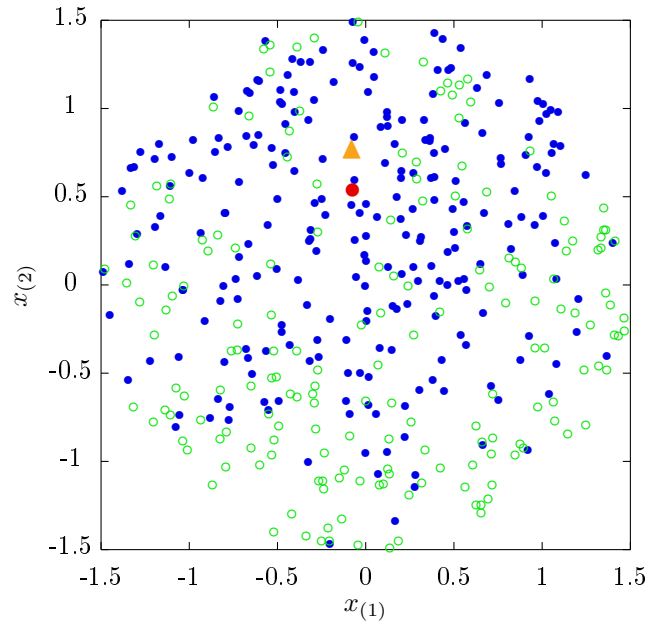


Figura 4.20: Representación de la estimación final lograda para el método ERM. Dicha estimación (\blacktriangle) toma el valor $\hat{\mathbf{x}}^t = (-0.080, 0.760)$ en este caso.

• Estimador basado en distancias

Con estimador basado en distancias sólo se contempla el escenario donde el fusor recibe las lecturas positivas de la red. La función de coste que se ha de minimizar en este caso se observa en la Figura 4.21.

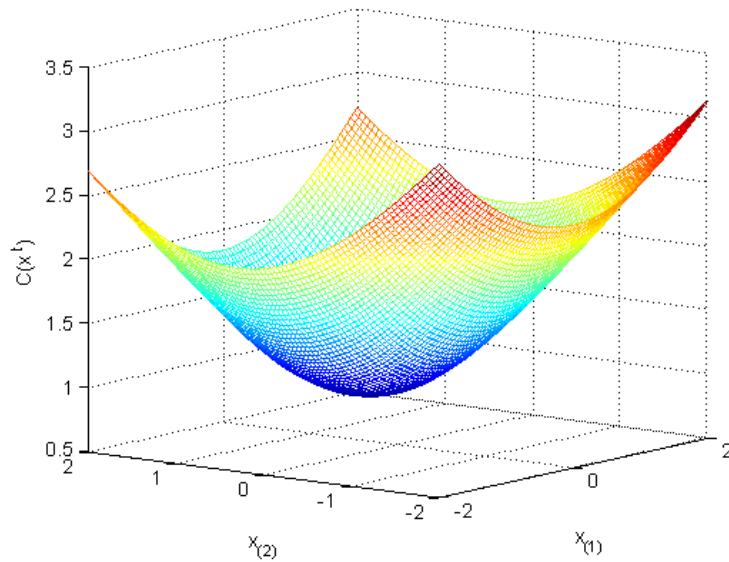


Figura 4.21: Función de coste del estimador basado en distancias, generada a partir de las posiciones de los sensores de la red con lecturas positivas.

A diferencia de los dos métodos anteriores, el estimador basado en distancias tiene solución analítica, por lo que no es necesario utilizar algoritmos de búsqueda. La estimación obtenida se muestra en la Figura 4.22, siendo su valor $\hat{\mathbf{x}}^t = (-0.025, 0.293)$.

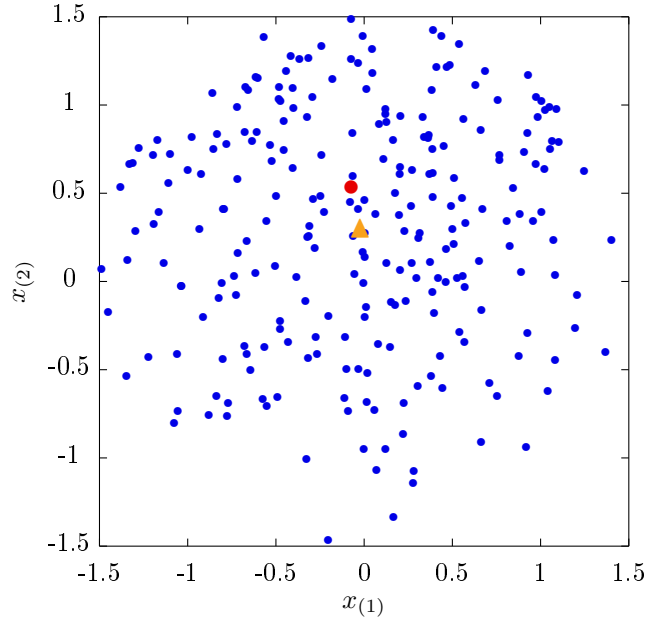


Figura 4.22: Representación de la estimación final lograda para el método basado en distancias. Dicha estimación (\blacktriangle) toma el valor $\hat{\mathbf{x}}^t = (-0.025, 0.293)$ en este caso.

- **Mejora del estimador basado en distancias**

En último lugar, se realiza la simulación utilizando el estimador mejorado basado en distancias. Tal y como se describió en el Apartado 3.4.3, este estimador sólo emplea un número reducido de sensores con lecturas positivas.

Como aproximación inicial en este caso, se emplea la estimación final lograda con el método basado en distancias del apartado anterior (Figura 4.22).

A continuación calcula la mínima distancia que separa dicha estimación inicial $\hat{\mathbf{x}}^t(0)$ del límite de la región de despliegue \mathcal{D} , en este caso $d = 1.206$, y genera la región \mathcal{D}'' como un círculo de radio d y centro en $\hat{\mathbf{x}}^t(0)$.

Por último, obtiene la estimación final utilizando sólo a los sensores con lecturas positivas que se encuentran en dicha región \mathcal{D}'' , tal y como se observa en la Figura 4.23. Dicha estimación es el punto que minimiza la función de coste generada sólo con estos sensores. Para este caso, este coste se muestra en la Figura 4.24.

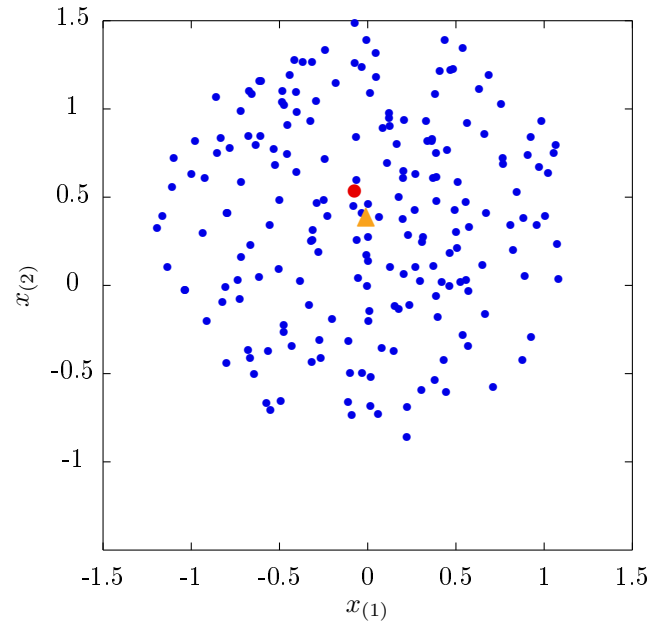


Figura 4.23: Representación de la estimación final lograda para la mejora método basado en distancias. En ella se muestran los sensores con lecturas positivas (\bullet) pertenecientes a la región \mathcal{D}'' que se utilizan para la estimación. Dicha estimación (\blacktriangle) toma el valor $\hat{\mathbf{x}}^t = (-0.011, 0.380)$ en este caso.

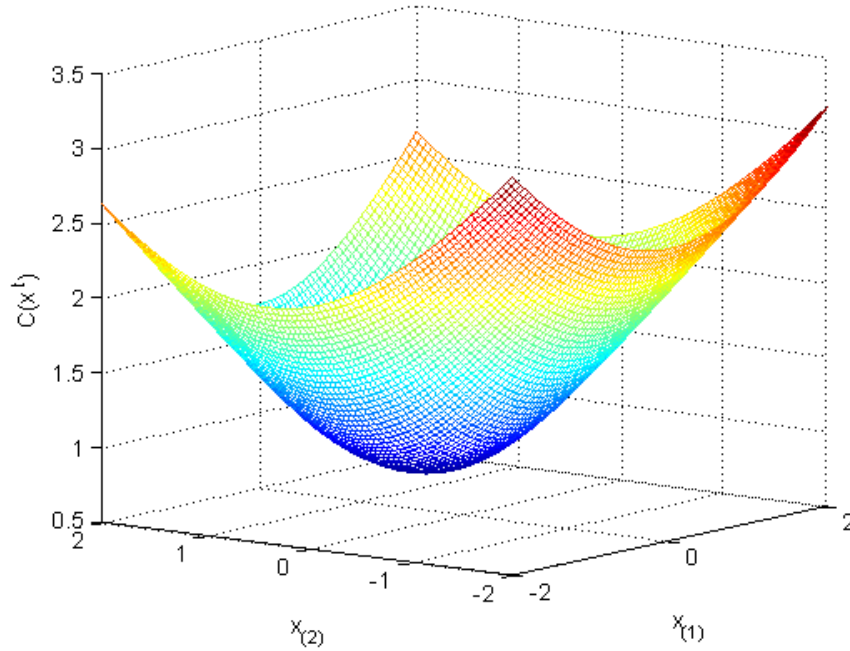


Figura 4.24: Función de coste de la mejora del estimador basado en distancias, generada a partir de las posiciones de los sensores de la región \mathcal{D}'' con lecturas positivas.

A modo de resumen, en la Tabla 4.4 se presenta la distancia de error obtenida con cada estimador para el ejemplo realizado.

ML	ERM	Dist	DistM
0.0942	0.2242	0.2473	0.1678

Tabla 4.4: Error obtenido para cada estimador en el ejemplo desarrollado.

4.1.5. Escenario de referencia

La gran cantidad de combinaciones de valores de los parámetros de diseño provoca que existan un gran número de escenarios posibles a estudiar. Para simplificar el estudio de las prestaciones de localización, se establece un entorno tipo o de referencia sobre el que se van modificando una a una las características de diseño. De esta forma, se logra un análisis ordenado del proceso de localización.

El entorno de referencia escogido se caracteriza por:

- *Región/Despliegue*: Escenario IV (circular, despliegue ordenado) con $r_e = 1.5$, $r'_e = 1$, y $\rho_s = 100$.

Se escoge el escenario normalizado de regiones circulares por tener mayor simetría que el escenario con regiones cuadradas. El despliegue elegido es el ordenado de tipo rejilla, para cubrir de forma uniforme la región de estudio. Además, en los casos que sea necesario, se fija un valor medio de densidad de sensores en la región.

- *Sensores*: De las tres clases de sensores definidas, se utiliza de manera preferente los que tienen prestaciones intermedias (Clase B) para poder extrapolar conclusiones a las otras dos clases que representan casos más extremos. Sus características son:
 - Probabilidad falsa alarma $\alpha = 0.05$.
 - Probabilidad de pérdida $\beta = 0.05$.
 - Rango de actuación 1.5 (p_d sombrero cordobés).
- *Probabilidad de detección*: Se escoge el tipo exponencial norma 2 al cuadrado, por ser una función que modela una gran cantidad de fenómenos físicos de la naturaleza.
- *Método de estimación*: ML con las lecturas de todos los sensores de la red, ya que a priori, es el método de estimación que mejores prestaciones obtiene.

4.2. Comparativa de prestaciones según el tipo de probabilidad de detección

Una vez descritos el proceso de simulación y los escenarios empleados, en esta sección y las siguientes, se realiza el análisis de las prestaciones de las reglas de fusión estudiadas en función de los distintos criterios de diseño de la red. De esta forma, es posible comprobar la importancia de éstos sobre el proceso de localización y, en particular, de qué manera concreta afectan a cada uno de los estimadores utilizados.

En este primer apartado se analiza la influencia que tiene el tipo de probabilidad de detección empleada. Tal y como se mostró en la Sección 4.1.3, cada función p_d provoca una distribución diferente de las lecturas generadas por los sensores de la red. Para comparar el efecto sobre la precisión de la localización, en las figuras 4.25 a 4.30 se representa la evolución, respecto a la densidad de sensores ρ_s , del error medio de localización de cada método utilizando las p_d estudiadas.

De esta manera, cada gráfica muestra el rendimiento de cada uno de los seis estimadores propuestos —ML, MLc, ERM, ERMc, Dist y DistM— empleando cuatro probabilidades de detección equivalentes —sombrero, lineal, exponencial cuadrado y exponencial— en un mismo escenario, estableciéndose así una comparación equitativa. Dicho escenario se caracteriza por:

- *Región/Despliegue*: Escenario IV (circular, despliegue ordenado) con radios $r'_e = 1$ y $r_e = 1.5$.
- *Sensores*: se considera únicamente el caso de prestaciones intermedias, sensores Clase B.
 - Probabilidad falsa alarma $\alpha = 0.05$.
 - Probabilidad de pérdida $\beta = 0.05$.
 - Rango de actuación 1.5 (p_d sombrero cordobés).
- *Probabilidad de detección*: se definen cuatro probabilidades equivalentes tomando el caso *sombrero cordobés* como referencia.

<i>Sombrero</i>	<i>Lineal</i>	<i>Exponencial 2</i>	<i>Exponencial</i>
$r_o = 1.5$	$r_o = 2.598$	$\theta = 0.444$	$\theta = 0.941$

Tabla 4.5: Valores de los parámetros r_o y θ para cada tipo de p_d .

- *Número de realizaciones*: 8000 para Dist y DistM, y 2000 para el resto. Esta diferencia se debe a que la carga computacional es muy inferior para los estimadores basados en distancia.

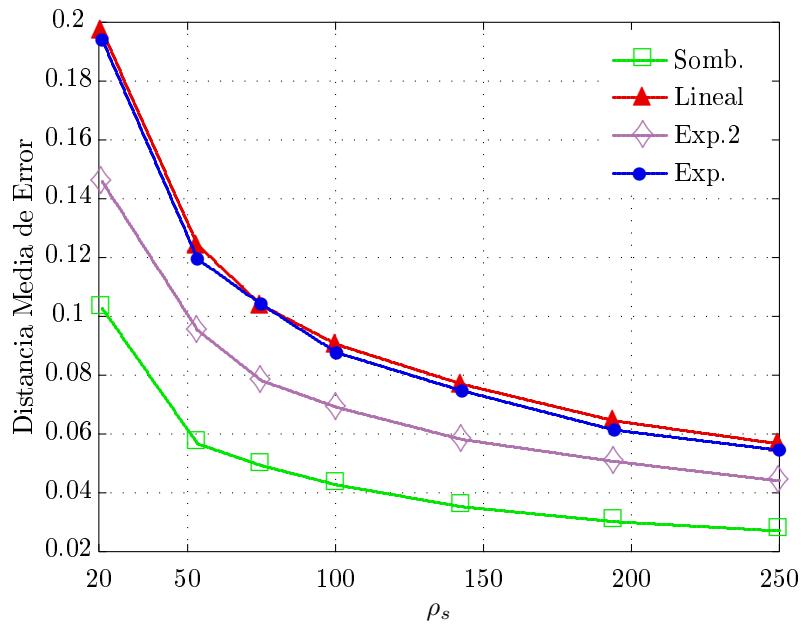


Figura 4.25: Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador ML sin censura con cada uno de los tipos de probabilidad de detección.

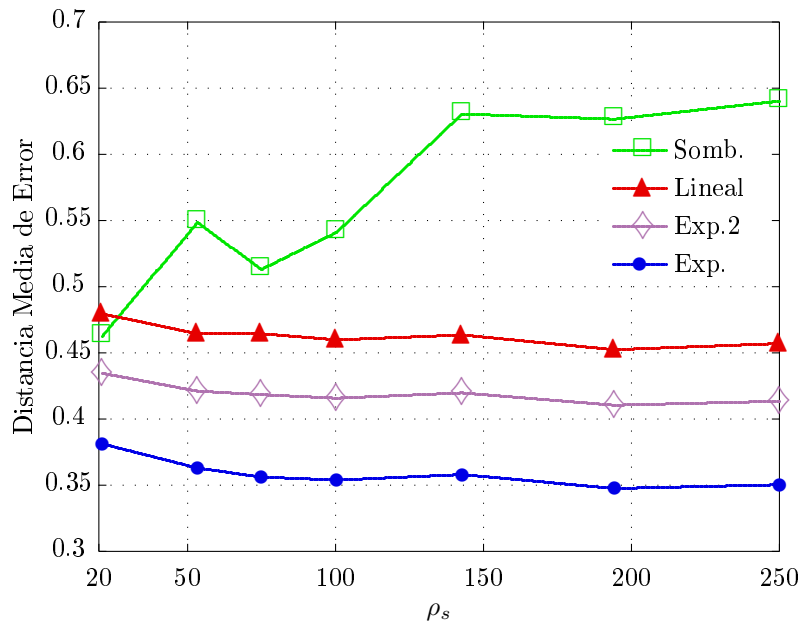


Figura 4.26: Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador ML con censura con cada uno de los tipos de probabilidad de detección.

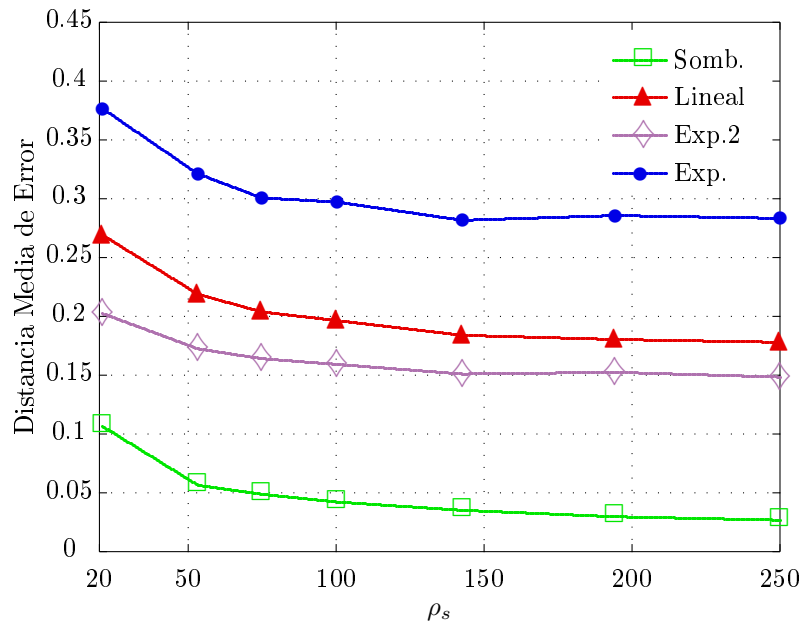


Figura 4.27: Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador ERM sin censura con cada uno de los tipos de probabilidad de detección.

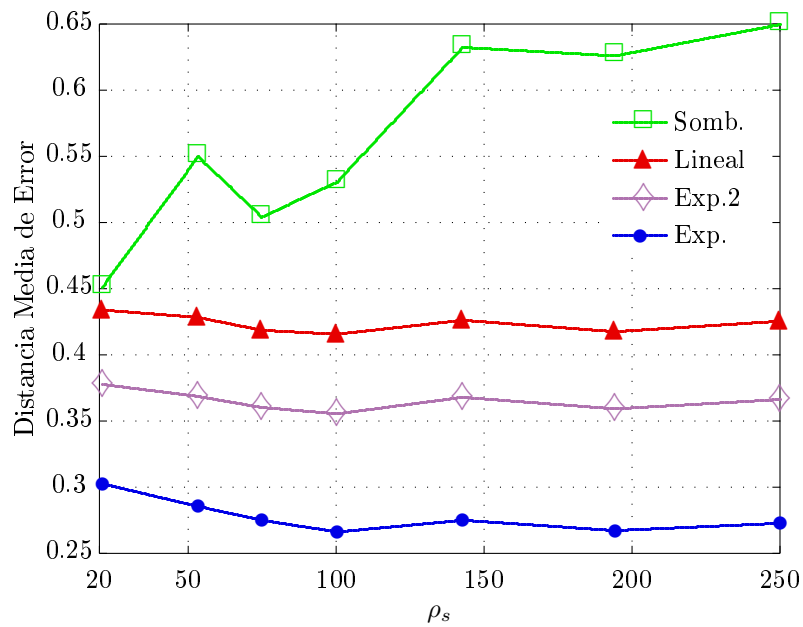


Figura 4.28: Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador ERM con censura con cada uno de los tipos de probabilidad de detección.

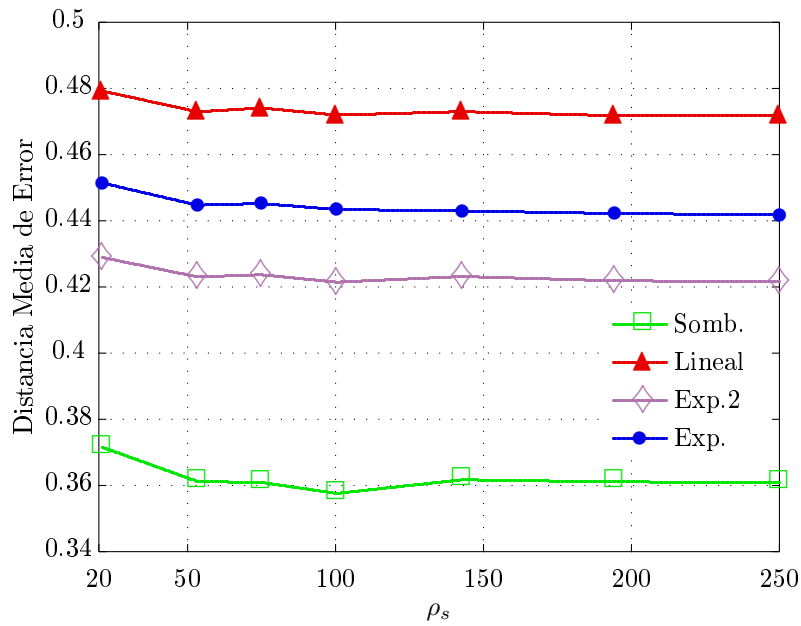


Figura 4.29: Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador basado en distancia (con censura) con cada uno de los tipos de probabilidad de detección.

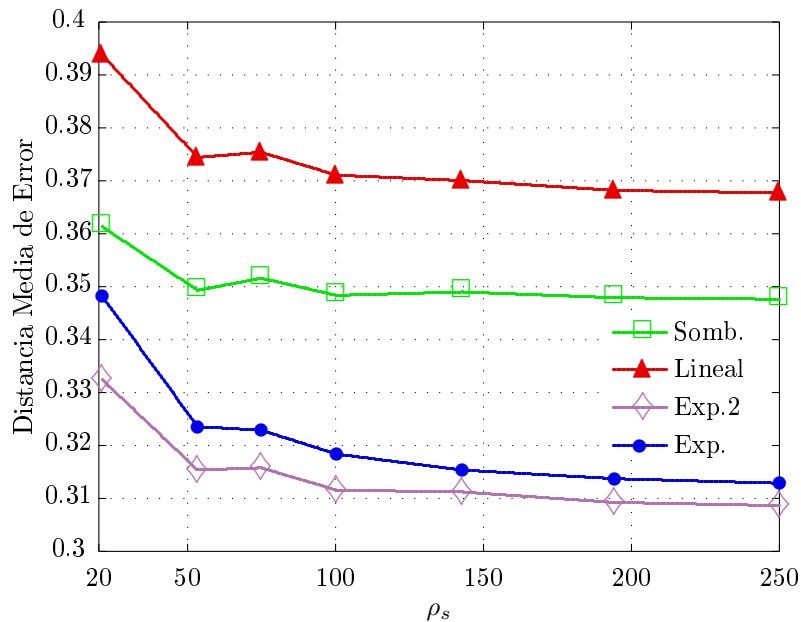


Figura 4.30: Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para la mejora del estimador basado en distancia (con censura) con cada uno de los tipos de probabilidad de detección.

A primera vista, la gráficas obtenidas muestran que, para los sensores Clase B, existen grandes diferencias entre cuales son las probabilidades que ofrecen un mejor rendimiento según el estimador utilizado. Sin embargo, aparecen patrones comunes en función de las lecturas utilizadas, y del tipo de coste empleado (basado en distancias o en p_d).

En primer lugar, se puede observar que para los estimadores que utilizan todas las lecturas positivas y negativas (ML y ERM), las mejores prestaciones se consiguen con una p_d de tipo *sombrero cordobés*, y en segundo término con una de tipo exponencial al cuadrado. Esto ocurre porque dichas funciones p_d tienen una forma más suave en la región cercana al máximo que en el caso lineal y exponencial, por lo que, al combinarlas para formar la función de coste, provoca la aparición de un único mínimo o máximo.

En los casos lineal y exponencial, que son los que peor rendimiento obtienen, la caída de probabilidad cerca del sensor se produce de forma más abrupta, y con su combinación, se genera una función de coste rugosa, con múltiples mínimos y máximos relativos a los que puede converger el algoritmo de búsqueda.

Por otra parte, comparando los resultados de ML y ERM con sus versiones censuradas, MLc y ERMc, se observa que para todos los tipos de p_d se reduce la precisión de localización. Las probabilidades que más sufren esta degradación son la de tipo exponencial al cuadrado y, sobre todo, la de tipo *sombrero cordobés*. La razón reside en que se ven más perjudicadas por la eliminación de la penalización que representan las lecturas negativas en la función de coste. Cuando estas lecturas están presentes, el efecto que producen es que dicha función de coste sea más estrecha. Sin embargo, cuando existe censura el hecho de tener unas p_d más planas cerca del máximo es negativo, ya que ahora el máximo o mínimo del coste no es tan claro como antes. Concretamente, en la función de coste formada con la p_d *sombrero cordobés* no existe un único máximo/mínimo sino una región de ellos, y añadido a que el rango de los sensores es grande, como ocurre con los sensores Clase B, provoca que el estimador no funcione correctamente.

Finalmente se analiza el caso de los métodos basados en distancia. Para el estimador Dist, las mejores p_d son la que generan la mayor parte de lecturas positivas cerca de la posición del agente, como es el caso del tipo *sombrero cordobés*. Sin embargo, al eliminar las lecturas más alejadas para realizar la estimación con el estimador DistM, se observa que se produce una mejora muy notable del error para los casos lineal, exponencial al cuadrado y exponencial (que tienen una mayor dispersión de las lecturas positivas como se observó en el Apartado 4.1.3), mientras que con el *sombrero cordobés* no se mejora significativamente la precisión. Este hecho significa que para este caso no se eliminan demasiadas lecturas, ya que la gran mayoría se encuentra cerca del sensor.

4.3. Comparativa de prestaciones según la forma de la región de estudio

Otro de los aspectos a estudiar, es comprobar la precisión del proceso de localización en los distintos tipos de regiones de despliegue. Para ello, en este apartado se simula el comportamiento de los estimadores propuestos en dos escenarios: uno con regiones circulares y otro con regiones cuadradas.

Para lograr que los resultados puedan ser comparables dichos escenarios deben ser equivalentes, es decir, las regiones \mathcal{D}' y \mathcal{D} de ambos deben encerrar el mismo área y e idéntica ρ_s . Las características completas de la simulación empleada son:

- *Región/Despliegue:* Dos escenarios equivalentes:
 - Escenario IV (circular, despliegue ordenado) con radios $r'_e = 1$ y $r_e = 1.5$.
 - Escenario II (cuadrado, despliegue ordenado), de dimensiones equivalentes, con semilados $r'_e = 0.886$ y $r_e = 1.329$.
- *Sensores:* en esta ocasión se considera el caso de mejores prestaciones, sensores Clase A, porque con ellos se observa de manera más clara la diferencia de prestaciones.
 - Probabilidad falsa alarma $\alpha = 0.001$.
 - Probabilidad de pérdida $\beta = 0.001$.
 - Rango de actuación 0.5 (p_d sombrero cordobés).
- *Probabilidad de detección:* Exponencial norma 2 al cuadrado con $\theta = 4$ (equivalente a r_o (somb. cord.) = 0.5).
- *Número de realizaciones:* 2000.

A continuación se muestran los resultados obtenidos mediante la representación del error de localización, medido como distancia de error promedio, en función de la densidad de sensores ρ_s de la red. En la primera gráfica (Figura 4.31) aparecen las prestaciones, en regiones cuadradas y circulares, de los estimadores ML y ERM con una estrategia sin censura. La Figura 4.32 por su parte, contiene dichas prestaciones para el caso con censura de ML y ERM. Por último, en la Figura 4.33 se observa el rendimiento en regiones circulares y cuadradas de los métodos basados en distancia.

En todos lo casos, las contracciones “ci” y “cu” son utilizadas para denotar que los resultados corresponden al escenario circular o al escenario cuadrado.

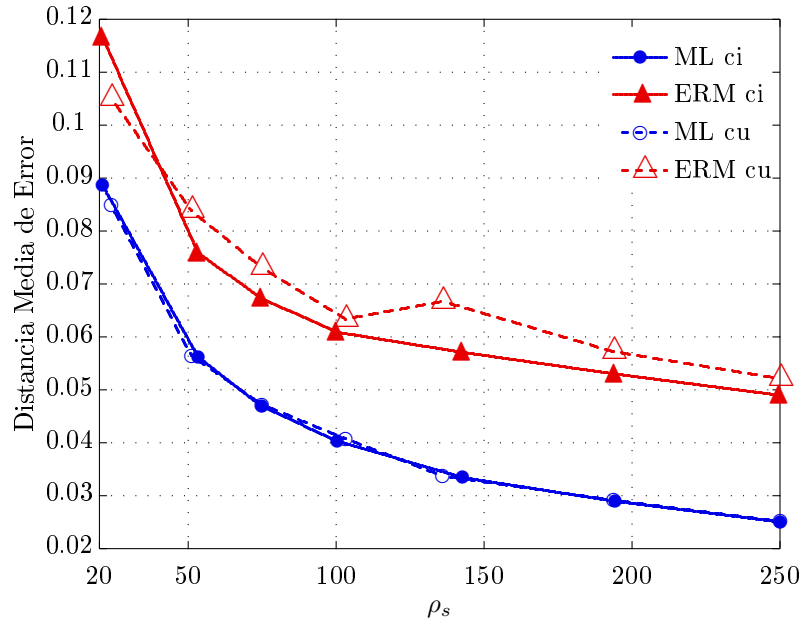


Figura 4.31: Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML y ERM (cuando no existe censura) obtenidas sobre regiones circulares y cuadradas equivalentes.

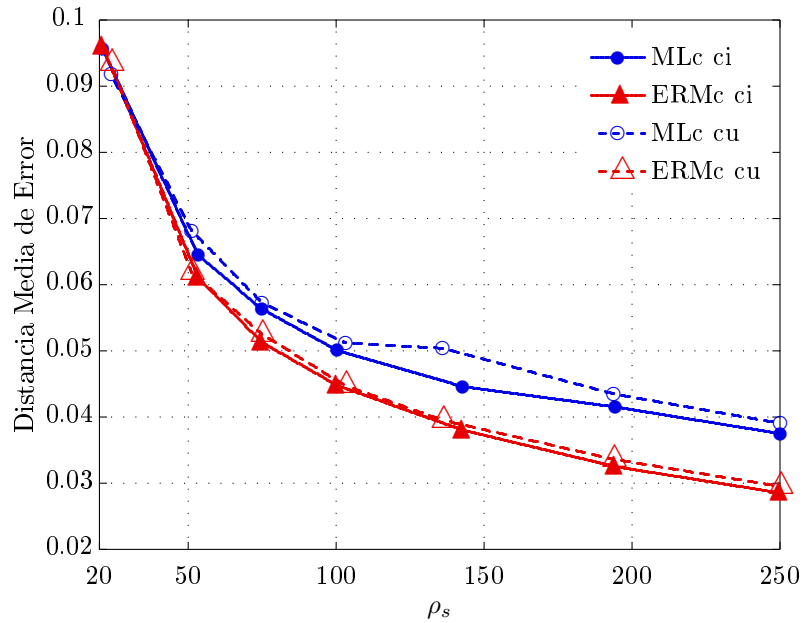


Figura 4.32: Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML y ERM con censura, obtenidas sobre regiones circulares y cuadradas equivalentes.

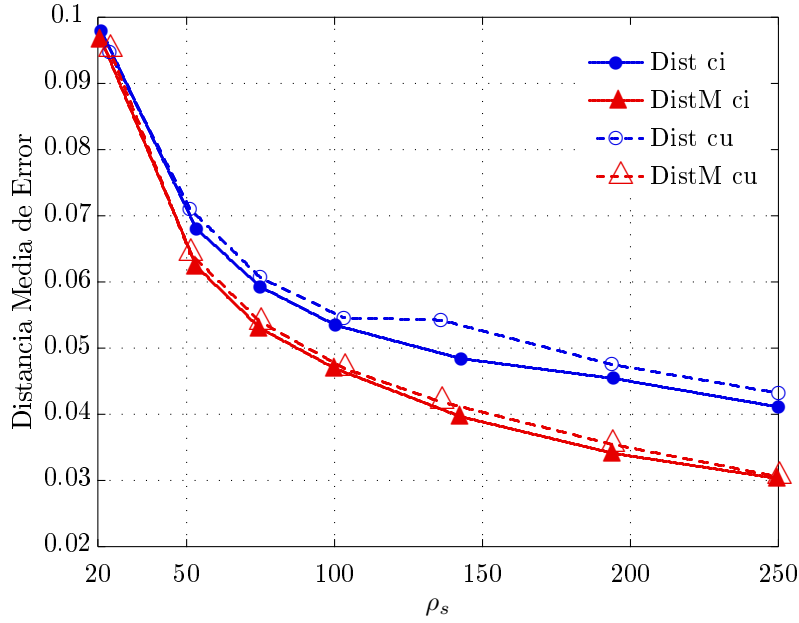


Figura 4.33: *Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador basado en distancia y para el estimador mejorado de éste, obtenidas sobre regiones circulares y cuadradas equivalentes.*

Se observa que en todas las figuras presentadas en esta sección, los estimadores empleados en escenarios circulares tienen una precisión media mayor que cuando son utilizados en escenarios cuadrados. Esto se debe a que el error de localización de un agente no es homogéneo en toda la región de localización \mathcal{D}' , y por lo tanto existen zonas en las regiones cuadradas donde el rendimiento del estimador es peor que en el escenario circular, contribuyendo a que el error medio aumente³.

Es necesario recordar que, tal y como se comprobó en el Apartado 4.1.2, los sensores para los que el agente se encuentra fuera de sus rangos de actuación, y al cual sólo detectan debido a falsas alarmas, no contribuyen significativamente en la mejora de la precisión de localización. Así pues, para una clase de sensores (con α , β y rango fijos), cuanto mayor número de éstos sitúen al agente dentro de su rango de acción mejor será la precisión del estimador. Dichos sensores corresponden con los nodos situados en un área circular —denotada como \mathcal{R} — con centro en la posición \mathbf{x}^t del agente, y cuyo radio tiene el valor del rango de actuación de los sensores.

Con esta premisa se puede observar que las estimaciones obtenidas cuando el agente a localizar se sitúa en posiciones centrales de \mathcal{D}' son similares en

³Los valores obtenidos para cada densidad ρ_s de las gráficas representa la media de los errores de múltiples localizaciones de agentes situados de manera aleatoria por toda la superficie de \mathcal{D}' .

el escenario circular y cuadrado, ya que el número de sensores que tienen a dicho agente dentro de su rango es idéntico.

Sin embargo, cuando \mathbf{x}^t se posiciona cerca de los límites de la región \mathcal{D}' , el número de sensores que sitúan al agente dentro de su rango es mayor en el escenario circular que en el cuadrado, por lo que el error de localización es mayor en este segundo caso.

Esto es debido a que dentro de las regiones \mathcal{R} asociadas a los agentes situados en los límites de \mathcal{D}' (o en las proximidades a éste), aparece un área donde no existen sensores desplegados (área donde \mathcal{R} y \mathcal{D} no se solapan). Esta zona de no coincidencia es mayor para el caso cuadrado que para el circular, porque la distancia mínima entre los límites de \mathcal{D}' y \mathcal{D} , en escenarios equivalentes, es siempre menor en el caso cuadrado que en el circular (en la simulación 0.443 y 0.5 respectivamente). En la Figura 4.34 se muestra una representación gráfica de esta situación.

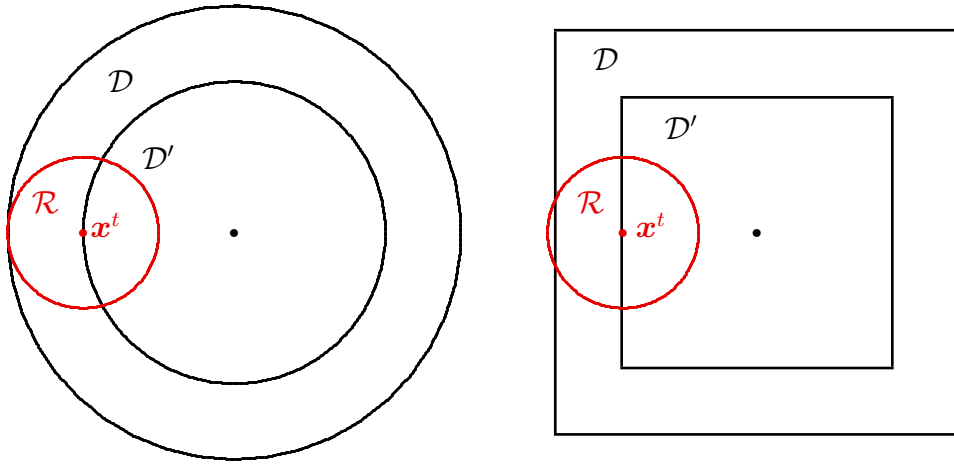


Figura 4.34: Representación de un escenario circular y otro cuadrado equivalentes, y de la región \mathcal{R} de un agente situado en el límite de la región \mathcal{D}' en cada escenario. En ambos casos las regiones \mathcal{R} son idénticas, y sus radios corresponden al rango de los sensores Clase A ($r_o = r_e - r'_e$ calculado sobre el escenario circular).

Con estos resultados, se puede extrapolar que si el rango de los sensores alcanza tal valor que para cualquier posición del agente en \mathcal{D}' todos los sensores de la red tienen a dicho agente situado dentro de su rango, no deben existir diferencias significativas entre la precisión en una región circular y cuadrada. Esta misma situación también se produce si el rango disminuye tanto que para los agentes situados en los límites de la región \mathcal{D}' de ambos escenarios, no existe una zona de no coincidencia entre \mathcal{R} y \mathcal{D} .

4.4. Comparativa de prestaciones según el tipo de despliegue

En esta sección, el parámetro bajo el que se establece una comparación de las prestaciones de los estimadores es la forma en la que se despliegan los sensores en la región de estudio. En este proyecto se han descrito dos tipos: uno aleatorio mediante una distribución uniforme en la región \mathcal{D} , y otro ordenado en forma de rejilla sobre dicha región.

En redes reales el despliegue se realiza, generalmente, de forma aleatoria, aunque en redes con un número limitado de elementos, el despliegue ordenado puede ser factible, por lo que resulta interesante conocer si este mayor esfuerzo en la situación de los sensores representa una mejora de la precisión.

Para conseguir que la comparación sea equitativa, el número de sensores utilizados en ambos despliegues debe ser idéntico (o la densidad ρ_s si el escenario es el mismo). Con esta premisa, el entorno empleado es:

- *Región/Despliegue*: Dos escenarios equivalentes:
 - Escenario III (circular, despliegue aleatorio) con radios $r'_e = 1$ y $r_e = 1.5$.
 - Escenario IV (circular, despliegue ordenado) con idénticas dimensiones.
- *Sensores*: en esta ocasión se considera el caso de mejores prestaciones, sensores Clase A, porque con ellos se observa de manera más clara la diferencia de prestaciones.
 - Probabilidad falsa alarma $\alpha = 0.001$.
 - Probabilidad de pérdida $\beta = 0.001$.
 - Rango de actuación 0.5 (p_d sombrero cordobés).
- *Probabilidad de detección*: Exponencial norma 2 al cuadrado con $\theta = 4$ (equivalente a r_o (somb. cord.) = 0.5).
- *Número de realizaciones*: 2000.

Los resultados se presentan como la evolución del error de localización promedio de cada uno de los métodos propuestos en función de la densidad de sensores de la red ρ_s . De esta manera, en la Figura 4.35 se muestra el caso de despliegue aleatorio y ordenado de los estimadores ML y ERM sin censura, en la Figura 4.36 aparece la precisión de dichos métodos utilizando únicamente lecturas positivas (con censura), y finalmente en la Figura 4.37 se representan los resultados de los estimadores basados en distancia.

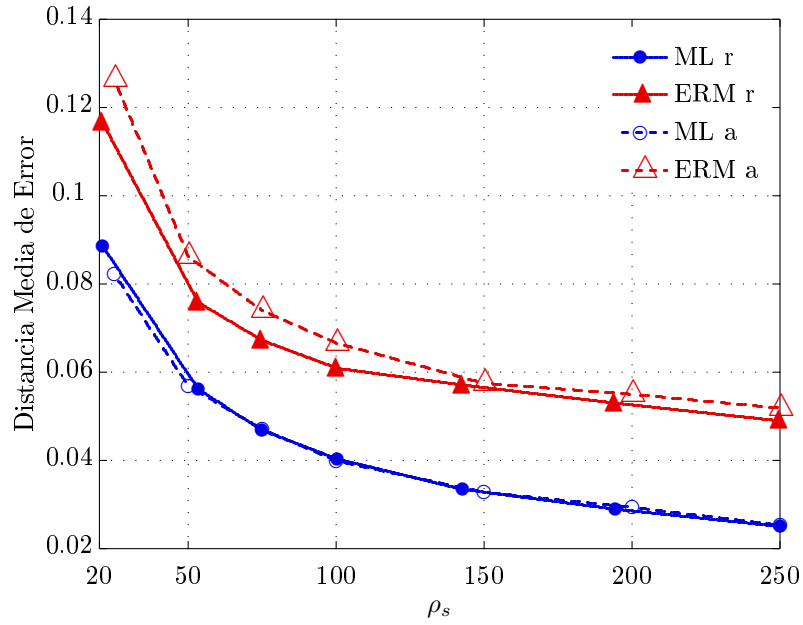


Figura 4.35: Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML y ERM (cuando no existe censura) obtenidas con despliegue aleatorio y despliegue ordenado de sensores.

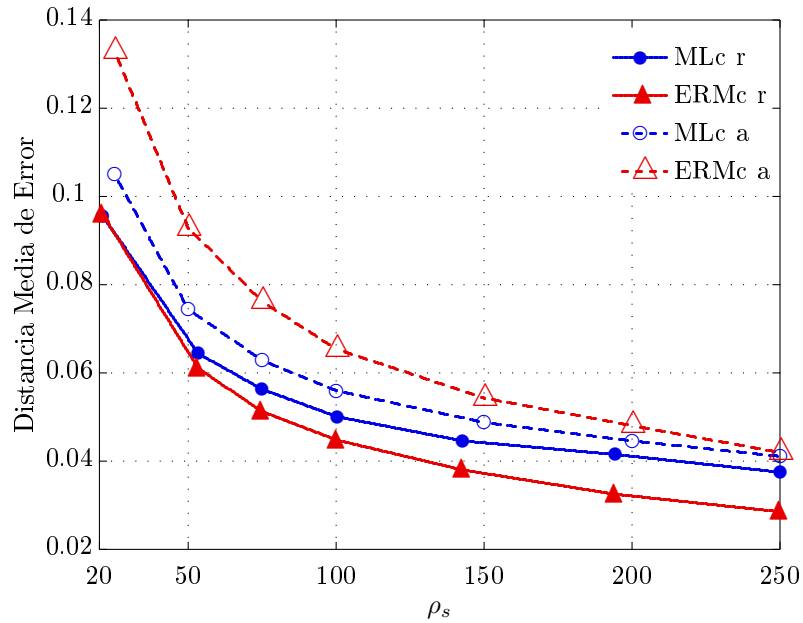


Figura 4.36: Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML y ERM con censura, obtenidas con despliegue aleatorio y despliegue ordenado de sensores.

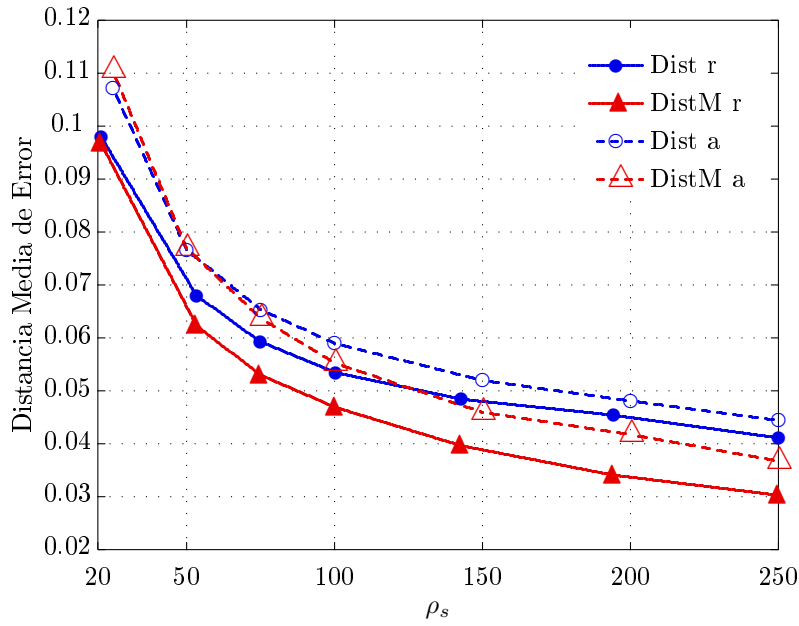


Figura 4.37: *Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para el estimador basado en distancia y para el estimador mejorado de éste, obtenidas con despliegue aleatorio y despliegue ordenado de sensores.*

Es necesario indicar que en estas figuras, las etiquetas “a” y “r” son empleadas para nombrar los casos de despliegue aleatorio y despliegue en rejilla respectivamente.

Como se puede observar, para todos los estimadores, el error medio obtenido es menor en el caso de utilizar un despliegue ordenado en forma de rejilla en lugar de usar un despliegue aleatorio.

Hay que tener en cuenta que en despliegues en rejilla, independientemente de la posición del agente a localizar, siempre existe un número mínimo constante de sensores que tienen al agente dentro de su rango de actuación, y que sin embargo, en el caso de despliegues aleatorios no existe dicho número mínimo sino que es variable.

Por tanto, a la vista de los resultados, se puede concluir que en media, la cantidad de sensores que tienen al agente dentro de su rango de actuación es mayor en el caso del despliegue ordenado en rejilla, lo que implica que, al utilizar la misma clase de sensores, los estimadores obtienen una mejor precisión para este caso.

4.5. Comparativa de prestaciones según las características de sensores

Continuando con el análisis de la precisión de la localización según los parámetros de diseño, en los siguientes apartados se expone el comportamiento alcanzado por la red de sensores en función de las características de éstos.

Así pues, se realiza una comparación de los métodos de estimación dependiendo de las prestaciones individuales de los sensores y de los parámetros que las determinan. En el primer apartado, se muestran los resultados obtenidos dependiendo de la clase de sensores utilizados. En segundo lugar, se analiza la influencia de la variación la probabilidad de falsa alarma y de pérdida, y por último, el criterio de diseño estudiado es el rango de actuación.

4.5.1. Comparativa según la clase

Empleando la definición de clases de sensores del Apartado 4.1.1, en la que se establecían tres tipos según las prestaciones individuales de los sensores, se simula el comportamiento de cada uno de los métodos estudiados utilizando tres redes homogéneas de sensores de dichas clases (una red con sensores de Clase A, otra con sensores de Clase B y otra con sensores de Clase C).

La elección de un tipo u otro de sensor resulta crucial para el diseño de la red, ya que su coste determina, generalmente, la capacidad de los mismos, y debido al uso de una gran cantidad de nodos en la red, dicho precio supone una limitación muy importante.

Para que la comparativa realizada resulte adecuada, la simulación propuesta emplea el mismo escenario para las tres clases de sensores estudiados. Este escenario se caracteriza por:

- *Región/Despliegue*: Escenario IV (circular, despliegue ordenado) con radios $r'_e = 1$ y $r_e = 1.5$.
- *Sensores*: se emplean tres redes con sensores de las tres clases definidas. Cada una de ellas se compone por sensores de la misma clase, cuyas características son:

	Clase A	Clase B	Clase C
α	0.001	0.05	0.1
β	0.001	0.05	0.1
r_o (somb. cordobés)	0.5	1.5	2.5

Tabla 4.6: *Parámetros de las clases de sensores utilizadas en la simulación.*

- *Probabilidad de detección:* Exponencial norma 2 al cuadrado con valores de θ para cada clase (equivalentes al valor del rango): $\theta_A = 4$, $\theta_B = 0.444$ y $\theta_C = 0.16$.
- *Número de realizaciones:* 2000.

Las figuras 4.38 a 4.40 que se muestran a continuación, representan las prestaciones, para cada red propuesta, de los métodos de estimación en función de la densidad de nodos sensores desplegados ρ_s por unidad de área. De esta forma, la precisión de los seis estimadores —ML, MLc, ERM, ERMc, Dist y DistM— en el caso de utilizar una red homogénea de sensores de Clase A se observa en la Figura 4.38. Por su parte, los resultados obtenidos empleando una red de sensores Clase B y Clase C aparecen en la Figura 4.39 y Figura 4.40, respectivamente.

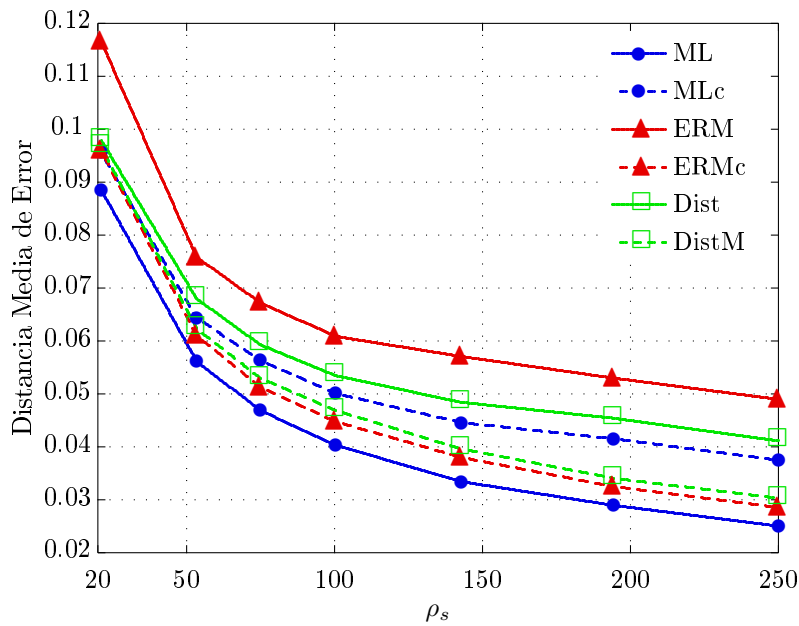


Figura 4.38: *Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML, ERM, MLc, ERMc, Dist y DistM obtenida para una red homogénea de sensores de mejores prestaciones (Clase A).*

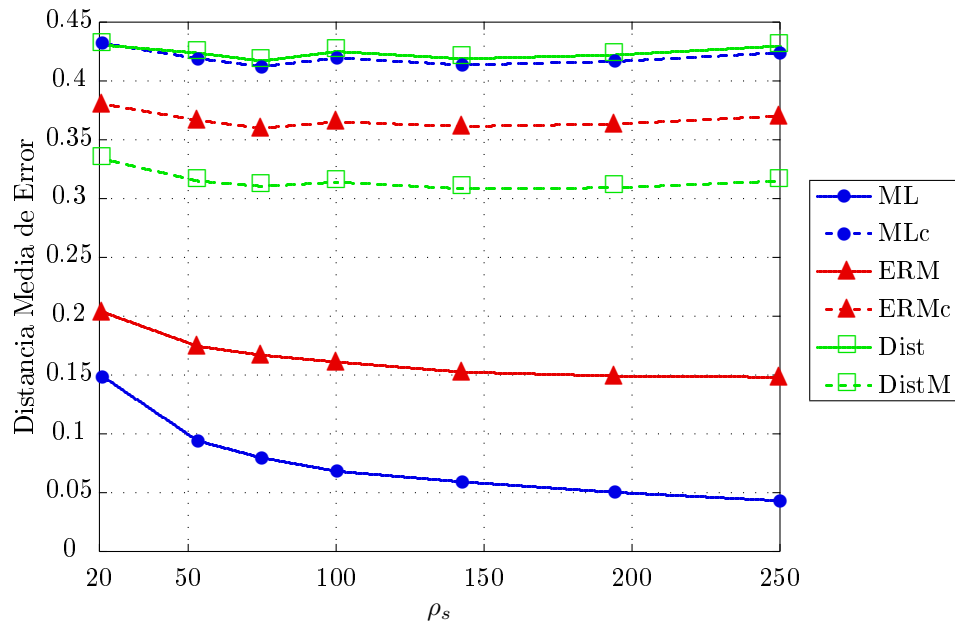


Figura 4.39: Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML, ERM, MLc, ERMc, Dist y DistM obtenida para una red homogénea de sensores de mejores prestaciones (Clase B).

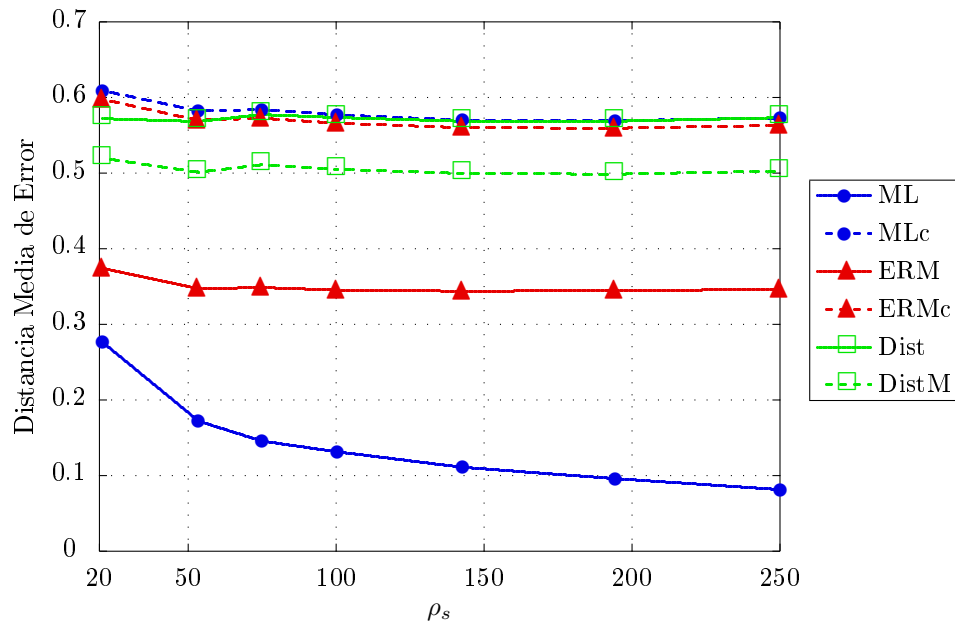


Figura 4.40: Distancia de error promedio en función de la densidad de sensores de la red para los estimadores ML, ERM, MLc, ERMc, Dist y DistM obtenida para una red homogénea de sensores de mejores prestaciones (Clase C).

A la vista de las simulaciones obtenidas es posible establecer varias observaciones:

- Tal y como era de esperar, al empeorar las prestaciones de los sensores que componen la red, se produce una disminución de la precisión de los estimadores en todos los casos.
- Además, se observa que dicha disminución de rendimiento no afecta por igual a todos los estimadores estudiados. Los métodos que sólo utilizan las lecturas positivas (MLc, ERMc, Dist y DistM) sufren una degradación mayor de sus prestaciones que los que utilizan todas las lecturas de la red (ML y ERM).
- Cabe destacar también, que a pesar de esta mayor degradación, los métodos con censura tienen un muy buen comportamiento para la red con sensores de Clase A, mejorando incluso el obtenido con el estimador ERM.
- Por otra parte, el estimador ML, que utiliza lecturas positivas y negativas, es, además del mejor de los estimadores sin censura, el método más estable en todos los escenarios, ya que su error es el que menos aumenta.
- Realizando un análisis dentro de los estimadores censurados, se evidencia que DistM es el más preciso en todas las situaciones (con sensores Clase A no es el mejor pero su comportamiento es casi idéntico al mejor en ese caso ERMc). Además se comprueba que este estimador mejorado tiene un error de localización menor que su versión inicial Dist, independientemente de la clase sensores elegida.
- Por último, se observa que el estimador ERMc siempre es mejor que MLc, circunstancia contraria a la que se produce con sus versiones sin censura.

4.5.2. Comparativa según la probabilidad de falsa alarma y de pérdida

Tras analizar el comportamiento de los métodos de localización según las características de los sensores de forma conjunta, resulta necesario conocer la influencia de los parámetros que fijan dichas prestaciones de los sensores de forma marginal. Por ello, en este apartado se analizan los parámetros probabilidad de falsa alarma (α), que representa la probabilidad de detectar a un agente situado fuera del rango de acción del sensor, y probabilidad de pérdida (β), definida como la probabilidad de no detectar a un agente situado en la misma posición que el sensor.

Estos parámetros determinan el valor máximo y mínimo de la probabilidad de detección del sensor, y sus valores se encuentran estrechamente ligados. Por simplicidad, en este análisis ambas probabilidades son variadas de manera simultánea, estableciendo el mismo valor para las dos en cada punto de la simulación.

El escenario utilizado para realizar la comparación de prestaciones es:

- *Región/Despliegue:* Escenario IV (circular, despliegue ordenado) con radios $r'_e = 1$, $r_e = 1.5$ y densidad de sensores $\rho_s = 100$.
- *Sensores:* Se fija que el rango de actuación de los nodos de la red sea el definido para la Clase B ($r_o = 1.5$) y que no varíe durante toda la simulación. Sin embargo, los valores de α y β son barridos para cubrir todo su margen, teniendo en cuenta que no es posible que dichas probabilidades tomen un valor mayor que 0.5. En ese caso el modelo del sensor no resulta real, ya que la detección del agente es menos probable dentro del rango de actuación que en la zona de falsa alarma.
- *Probabilidad de detección:* Exponencial norma 2 al cuadrado con $\theta = 0.444$ (equivalente a r_o (somb. cord.) = 1.5).
- *Número de realizaciones:* 2000.

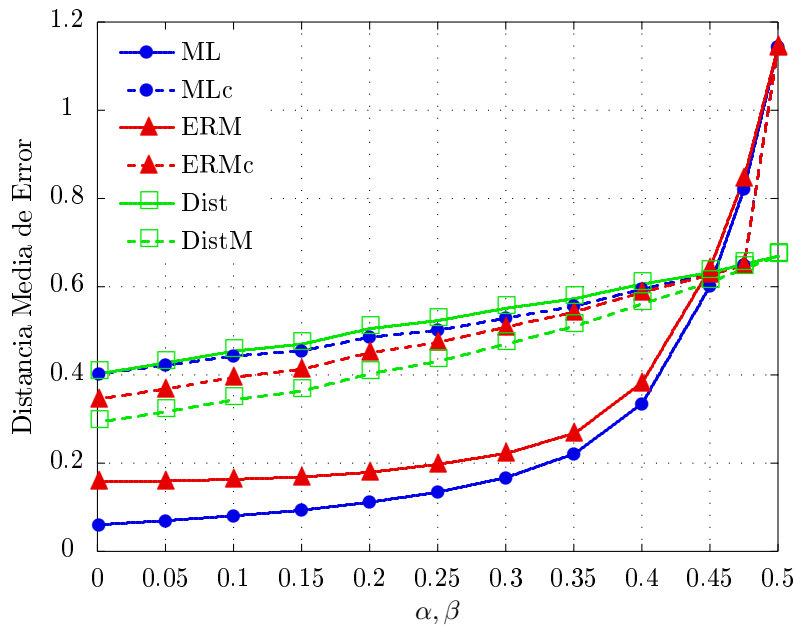


Figura 4.41: Evolución de la distancia de error promedio de los estimadores *ML*, *ERM*, *MLc*, *ERMc*, *Dist* y *DistM* en función del valor de las probabilidades α y β .

Así pues, los resultados son presentados en la Figura 4.41 como la evolución respecto al valor de α y β , de la precisión de los seis estimadores propuestos, expresada en términos de error medio de localización.

Como era previsible, en la figura se observa como el rendimiento de los estimadores propuestos disminuye a medida que aumenta el valor de α y β . Esto es debido a que la probabilidad de que sensores cercanos al agente lo detecten va disminuyendo al aumentar el valor de β , y también a que el número de sensores lejanos que realiza una detección positiva aumenta al incrementarse el valor de α . Ambos hechos provocan una distorsión de la estimación.

Además, se comprueba que hasta que las probabilidades aumentan a un valor de 0.45, el error de localización es menor para los métodos no censurados ML y ERM. En este rango de valores, la diferencia entre métodos con y sin censura es muy significativa, aunque la evolución del error es diferente en ambos casos: para los métodos que utilizan sólo las lecturas positivas la precisión disminuye de manera lineal, mientras que para los métodos sin censura el crecimiento del error se asemeja a una exponencial.

En el rango de probabilidades mayores que 0.45, se produce la circunstancia contraria, siendo los estimadores ML y ERM los que obtienen peor rendimiento. Sin embargo, este hecho no es muy relevante ya que sensores con estos valores tan altos de α y β no son realistas.

Finalmente, cabe indicar que dentro de los estimadores con censura, DistM es el que mejor rendimiento ofrece. Además, se observa que MLc es siempre menos preciso que ERMc, mientras que ocurre lo contrario cuando se utiliza la versión no censurada de estos estimadores.

4.5.3. Comparativa según el rango de los sensores

El rango de actuación representa el último factor que determina las prestaciones individuales de los sensores. Tal y como se detalló en secciones anteriores, este parámetro, cuyo valor queda fijado por las variables r_o o θ , se define como la región que comprende la posición del sensor y los puntos donde la probabilidad de detección de éste toman el valor de falsa alarma⁴.

Representa uno de los parámetros más importantes para la elección de los sensores porque su valor influye muy directamente en el coste de los nodos (generalmente un mayor rango implica un mayor coste). Por este motivo, el análisis de como su valor afecta al rendimiento de los estimadores estudiados —ML, MLc, ERM, ERMc, Dist y DistM— resulta útil para el diseño de la red.

⁴Para p_d de tipo exponencial y exponencial al cuadrado dichos puntos son aquellos en los que se alcanza un valor un 1 % mayor que α .

Este análisis se realizará mediante dos simulaciones. En la primera, representada en la Figura 4.42, se muestra el error de localización de los seis estimadores propuestos utilizando una probabilidad de detección de tipo exponencial al cuadrado, en función del parámetro θ , que para dicha p_d es el que fija el rango de actuación de los sensores. El margen de valores de θ que se simula es el que definen los rangos de las tres clases de sensores estudiadas (desde $r_o(\text{somb. cord.}) = 1$ (Clase C) hasta $r_o(\text{somb. cord.}) = 2.5$ (Clase A)).

En la segunda gráfica, Figura 4.43, se simula un conjunto de valores mayor de θ para tener una perspectiva más completa de la influencia del rango. Sin embargo, ésta sólo se realiza para los métodos basados en distancia, ya que realizarlo para todos los demás implica una carga computacional muy elevada.

En las simulaciones realizadas se emplea un mismo escenario para poder realizar una comparación equitativa de los resultados. Los parámetros del escenario son:

- *Región/Despliegue:* Escenario IV (circular, despliegue ordenado) con radios $r'_e = 1$, $r_e = 1.5$ y densidad de sensores $\rho_s = 100$.
- *Sensores:* Se establece que el valor de α y β sea el definido para la Clase B (0.05) y que no cambie durante toda la simulación. Por su parte, el rango de actuación es variado en cada punto de la simulación.
- *Probabilidad de detección:* Exponencial norma 2 al cuadrado. Se genera una p_d diferente para cada valor θ de la simulación. De esta forma, el margen de valores en cada simulación es:
 - Figura 4.42: $\theta \in [0.1, 4]$
 - Figura 4.43: $\theta \in [0, 50]$
- *Número de realizaciones:* 2000.

Antes de realizar el análisis de los resultados obtenidos, es preciso indicar que existe una relación inversa entre el valor del rango y el parámetro θ . Esto significa que un valor alto de θ corresponde con uno pequeño del rango, y viceversa.

En primer lugar se estudia la Figura 4.42, que analiza todos los estimadores en el margen de θ definido por los rangos de actuación de las tres clases de sensores. En ella, para todos los estimadores se produce un empeoramiento de la precisión cuando θ es pequeño (rango grande) y se acerca al valor fijado para los sensores de Clase C.

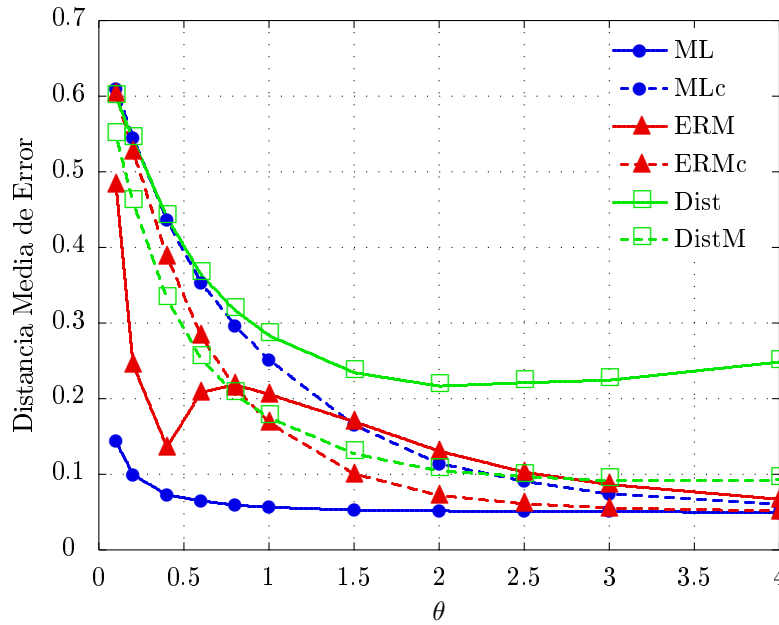


Figura 4.42: Evolución de la distancia de error promedio de los estimadores ML , ERM , MLc , $ERMc$, $Dist$ y $DistM$ en función del valor de θ .

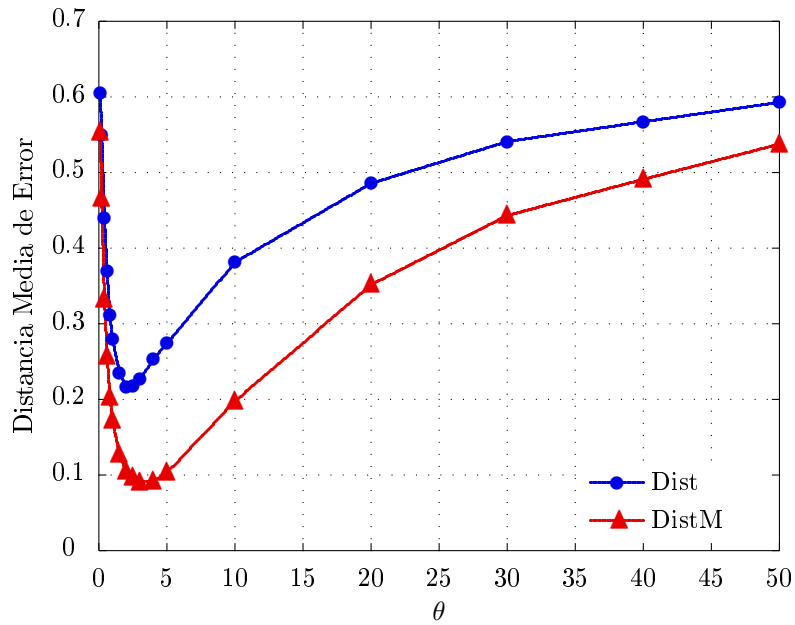


Figura 4.43: Evolución de la distancia de error promedio de los estimadores $Dist$ y $DistM$ en función del valor de θ .

Esta circunstancia, que en principio resulta un tanto sorprendente, se explica por el hecho de que el rango alcanza un valor demasiado grande en relación al tamaño de la región de estudio.

Como es conocido, el aumento del rango de los sensores, manteniendo constante el tamaño de la región de estudio y la densidad ρ_s , provoca el crecimiento de la región \mathcal{R} , que es la región donde están los sensores que sitúan a un agente dentro de su rango de acción.

Sin embargo, a partir de cierto valor del rango, dicha región \mathcal{R} es de tamaño muy superior a \mathcal{D} para cualquier agente situado en \mathcal{D}' , por lo que todos los sensores de la red tienen situado al agente en una zona de su p_d con alta probabilidad de detección. Esto provoca una distorsión de la estimación realizada, ya que el número de sensores que detectan al agente y la dispersión de éstos es tal, que el máximo/mínimo de la función de coste de los estimadores se desplaza hacia el centro de la región \mathcal{D}' , alejándose de la posición real del agente.

Por otra parte, analizando el comportamiento particular de los estimadores, se puede observar como ML es estimador que mejor resiste la variación del rango, y Dist el que peores prestaciones presenta en todo momento.

También cabe destacar que para θ muy pequeñas (rango grande) los estimadores con censura son mucho peores que los que utilizan todas las lecturas. Sin embargo, a medida que aumenta θ (rango disminuye) las diferencias se reducen, obteniendo un error muy cercano para $\theta = 4$.

Es importante comentar el extraño comportamiento que sufre el estimador ERM. Hasta $\theta = 0.4$ su error de localización va disminuyendo y su rendimiento es mejor que el de los métodos con censura. Sin embargo, en ese punto sufre una degradación de sus prestaciones, de tal forma que a partir de $\theta = 0.8$ tiene mayor error de localización que los estimadores ERMc y MLc. Este fenómeno no tiene, en principio, una explicación aparente, y se puede atribuir a que ERM es un método heurístico.

Además, como ocurría en los apartados anteriores, ERMc tiene siempre un comportamiento mejor que MLc, circunstancia que se produce al revés con ML y ERM.

El análisis de la Figura 4.43, que simula un espectro mayor de θ , permite extraer otras conclusiones importantes que no son sólo aplicables a los estimadores Dist y DistM, sino que son extrapolables al resto de estimadores. En ella, se observa, además de una degradación de la precisión por el uso de rangos excesivamente grandes, un aumento del error al reducir sustancialmente el tamaño de los rangos. La causa es que cada vez un menor número de sensores sitúan al agente dentro de su rango, llegando al extremo de que todos los sensores tengan al agente en sus regiones de falsa alarma. En ese caso, la detección es debida a éstas falsas alarmas, con lo que no se

produce un máximo o mínimo claro en la función de coste correspondiente, degradándose la precisión de los estimadores.

A consecuencia de estos hechos, se puede comprobar que para cada estimador existe un valor θ con el que se obtiene el error mínimo. Ese valor representa el rango ideal con el que deben trabajar los sensores de la red.

4.6. Análisis de prestaciones en función de la posición del objetivo a localizar

Los resultados mostrados en los apartados anteriores establecen la precisión de localización como un promedio de los errores de las realizaciones independientes, lo que implica tener un valor único para precisión en toda la región de estudio. Sin embargo, tal y como se concluía en el Apartado 4.3, el error obtenido no es independiente del punto de la región \mathcal{D}' en el que se encuentre el agente a localizar.

En principio esta diferencia de prestaciones entre unas zonas y otras de dicha región, se debe a que, en despliegues uniformes (ya sean aleatorios u ordenados), el número de sensores que operan dentro de su rango no es el mismo en todos los puntos de la región. Por ese motivo, en este último apartado de resultados se pretende comprobar dichas diferencias mediante la simulación de alguno de los estimadores estudiados en regiones circulares y cuadradas. Concretamente, se utiliza el estimador Dist como ejemplo de los métodos que utilizan costes basados en distancia y el estimador ML como ejemplo de los que utilizan costes basados en la p_d .

A diferencia de las localizaciones realizadas en los apartados previos, la posición del agente a localizar no se generará de manera aleatoria, sino que se fijará de forma predeterminada para barrer toda la región \mathcal{D}' y obtener un mapa de la precisión sobre dicha región.

El escenario empleado para este análisis se caracteriza por:

- *Región/Despliegue*: Dos escenarios equivalentes:
 - Escenario IV (circular, despliegue ordenado) con radios $r'_e = 1$, $r_e = 1.5$ y densidad $\rho_s = 55$.
 - Escenario II (cuadrado, despliegue ordenado), de dimensiones equivalentes, con semilados $r'_e = 0.886$, $r_e = 1.329$ y densidad $\rho_s = 55$.

La densidad de sensores se reduce, respecto al escenario de referencia, por la alta carga computacional que requiere este análisis.

- *Sensores*: se considera únicamente el caso de mejores prestaciones, sensores Clase A.
 - Probabilidad falsa alarma $\alpha = 0.05$.
 - Probabilidad de pérdida $\beta = 0.05$.
 - Rango de actuación 1.5 (p_d sombrero cordobés).
- *Probabilidad de detección*: Exponencial norma 2 al cuadrado con $\theta = 0.444$ (equivalente a r_o (somb. cord.) = 1.5).
- *Número de realizaciones*: 8000 para Dist y 4000 para ML.

Es importante indicar que, al utilizar un despliegue ordenado, es posible utilizar la simetría de la región \mathcal{D}' cuadrada y circular para reducir el número de puntos de la simulación. En el caso cuadrado existen cuatro ejes de simetría, con lo que, tal y como se muestra en la Figura 4.44, es suficiente con simular los puntos de una de las regiones triangulares resultantes y replicarla convenientemente.

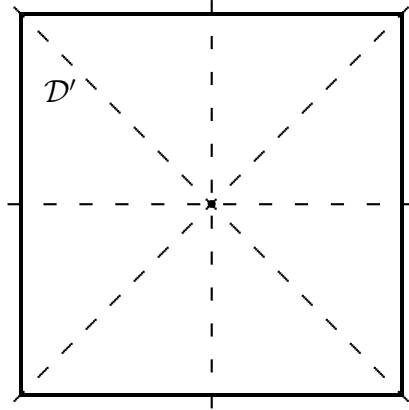


Figura 4.44: *Ejes de simetría en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada.*

En el caso circular sólo es necesario simular la posición del agente en los puntos de un radio de dicho círculo y generar el resto de la región de mediante la revolución de dicho radio.

De esta forma, en las figuras 4.45 y 4.46 se representa de forma tridimensional el error de localización en función de la posición del agente para el estimador Dist, y en las figuras 4.47 y 4.49 los resultados obtenidos para el estimador ML. Con el fin de facilitar el análisis de los resultados, para el caso ML, se realiza el perfil de las gráficas tridimensionales en la dirección de la diagonal de cada región \mathcal{D}' . Dichos perfiles aparecen en las figuras 4.48 y 4.50.

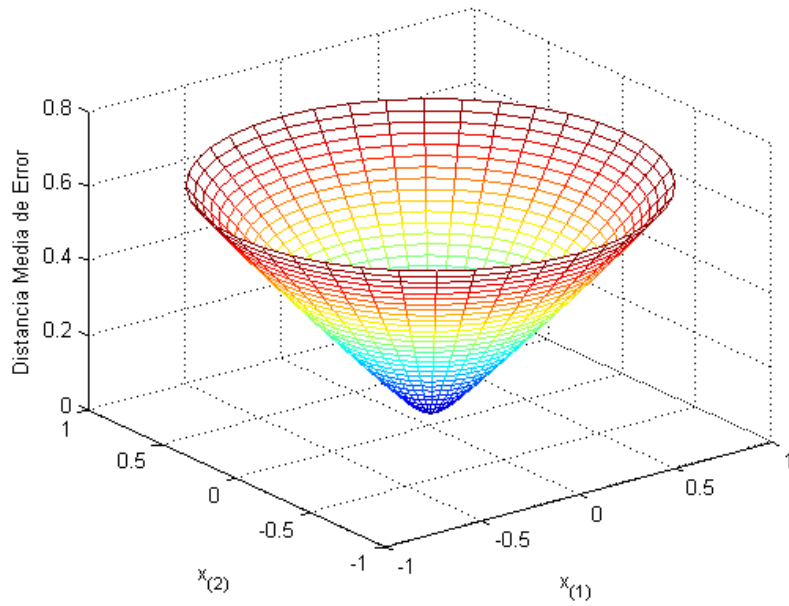


Figura 4.45: Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador *Dist*, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma circular.

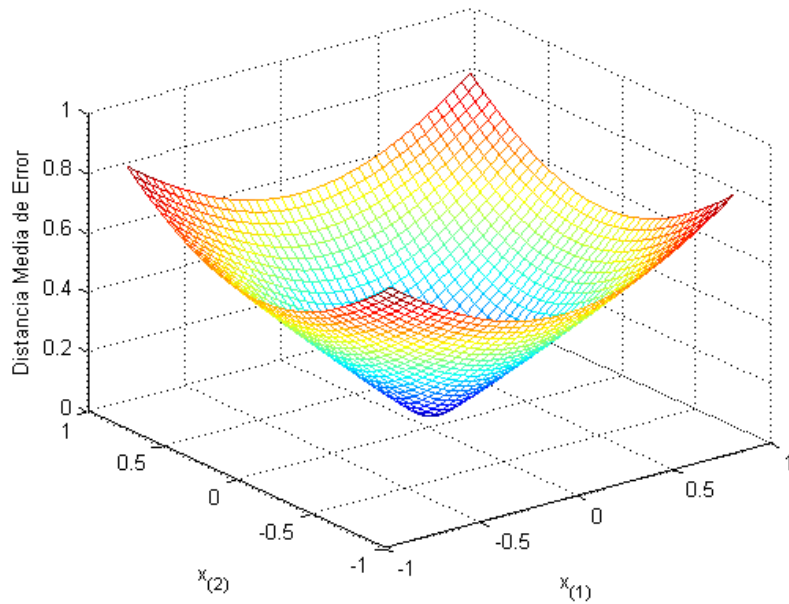


Figura 4.46: Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador *Dist*, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada.

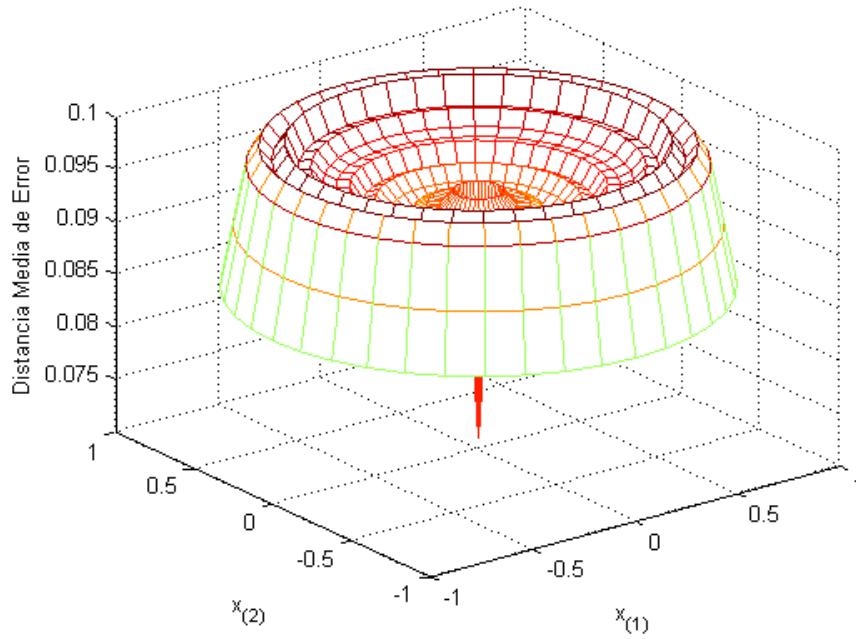


Figura 4.47: Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador ML, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma circular.

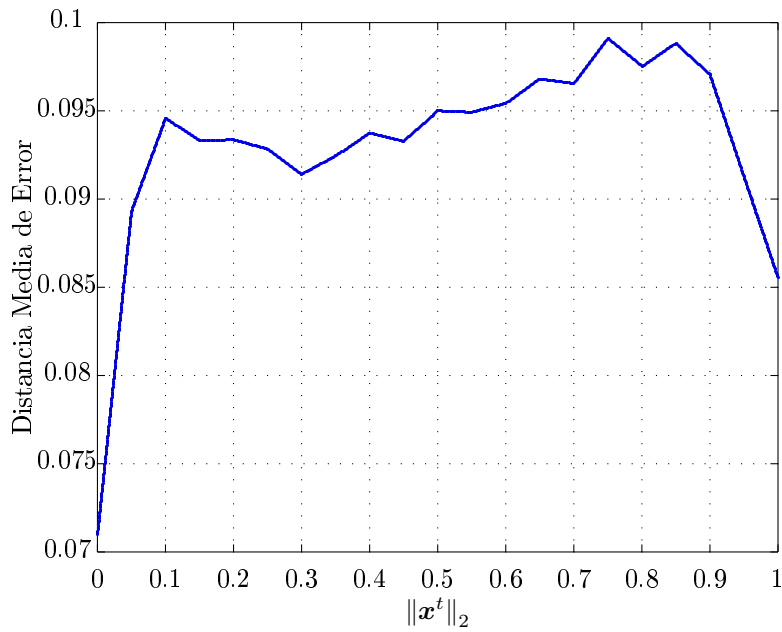


Figura 4.48: Sección de la Figura 4.47 que representa la precisión del estimador ML en una región \mathcal{D}' de forma circular, en función de la distancia del agente al origen de coordenadas. Esta sección representa un corte en la dirección de la diagonal de la región \mathcal{D}' .

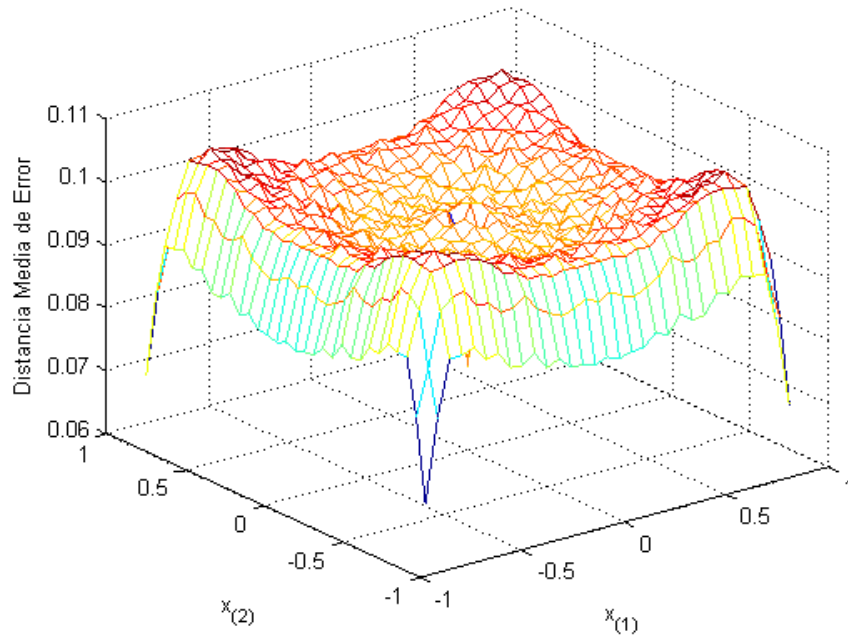


Figura 4.49: Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador ML, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada.

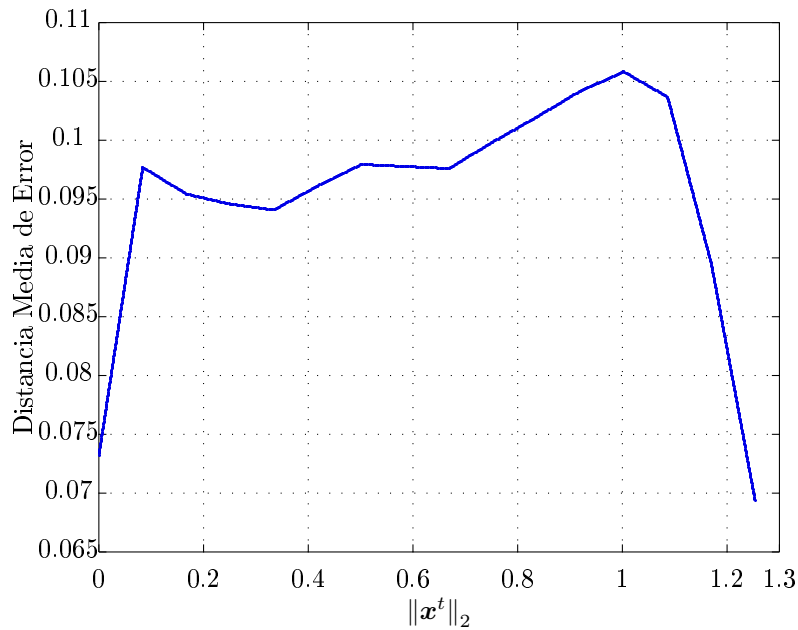


Figura 4.50: Sección de la Figura 4.49 que representa la precisión del estimador ML en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada, en función de la distancia del agente al origen de coordenadas. Esta sección representa un corte en la dirección de la diagonal de la región \mathcal{D}' .

En primer lugar, se analizan los resultados obtenidos para el estimador Dist. En ambos tipos de regiones, se observa como la precisión es mayor en la zona central de la región, pero a medida que la posición del agente se aproxima a los extremos de \mathcal{D}' el error aumenta. Como se comentó en el Apartado 4.3, esta diferencia es causada porque el número de sensores que tienen al agente dentro de su rango de acción es menor en los extremos que en el centro de la región.

Comparando un escenario con otro, se visualiza como en el caso circular la distancia de error es constante en todo el límite de la región de localización, mientras que en para el escenario cuadrado, las prestaciones son mucho peores en las esquinas de \mathcal{D}' .

Por otra parte, la precisión obtenida con el estimador ML también es mejor en la zona central de ambos escenarios y empeora cuando el agente se aleja del origen de coordenadas. Sin embargo, se produce un fenómeno inesperado cerca de los límites de \mathcal{D}' , ya que en esta región el error disminuye drásticamente. Esta mejora de precisión se debe a la corrección que se aplica a la estimación final de todos los estimadores descrita en la Sección 3.4. Como se relató, debido al conocimiento a priori de la región donde se sitúa el agente, es posible corregir la estimación dada por los estimadores si ésta no pertenece a la región \mathcal{D}' . Generalmente, esos casos se producen cuando el agente a localizar se encuentra cerca de los límites de dicha región \mathcal{D}' , por lo que al aplicar la corrección el error de estimación se reduce.

Para corroborar este hecho, y comprobar el impacto de esta corrección en los estimadores, se repetirán las simulaciones presentadas eliminando dicha corrección final. Estos resultados aparecen en las figuras 4.51 a 4.56. Al igual que antes, se presenta un perfil de las gráficas tridimensionales del estimador ML en la dirección de la diagonal de \mathcal{D}' .

Como se puede observar en estas nuevas simulaciones, para el estimador ML no se produce una disminución del error en la zona cercana a los extremos de \mathcal{D}' , sino que al eliminarse la corrección de la estimación, el error se incrementa progresivamente hasta llegar al límite de la región. Además, en esta situación, al igual que ocurría con el estimador Dist, las peores prestaciones se obtienen en las esquinas de la región cuadrada.

Por otra parte, es importante destacar que el estimador Dist no sufre significativamente el efecto de dicha corrección, ya que las gráficas en ambas situaciones (con y sin corrección) son muy similares.

Finalmente, se puede observar como el estimador ML tiene un rendimiento más homogéneo en la región \mathcal{D}' que el estimador Dist. Esta diferencia puede residir en la naturaleza de los costes que emplean ambos métodos, uno generado mediante la combinación de las funciones p_d y otro basado en la distancia entre el agente y los sensores de la red.

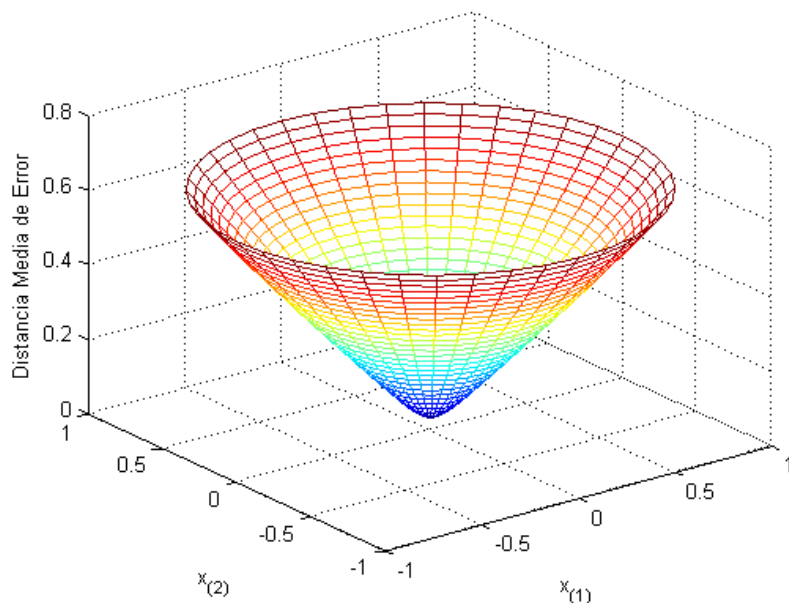


Figura 4.51: Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador *Dist*, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma circular y sin corrección de la estimación final.

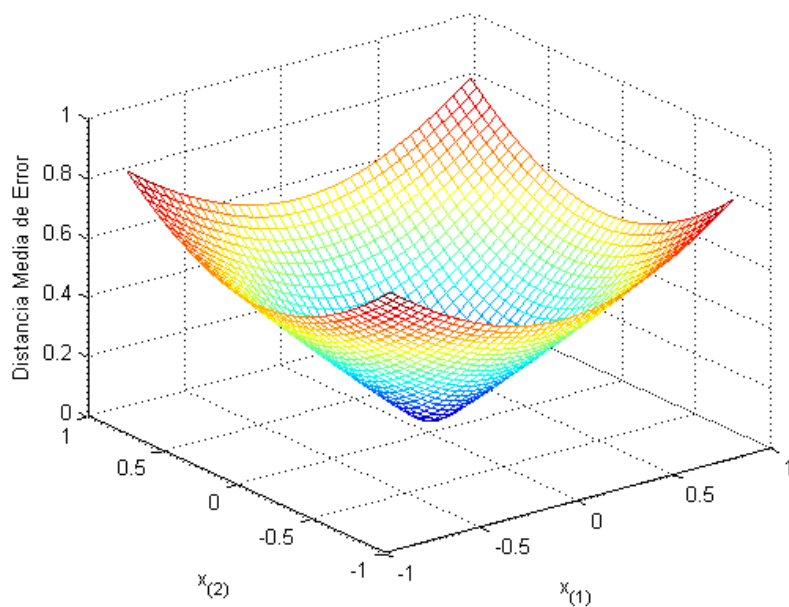


Figura 4.52: Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador *Dist*, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada y sin corrección de la estimación final.

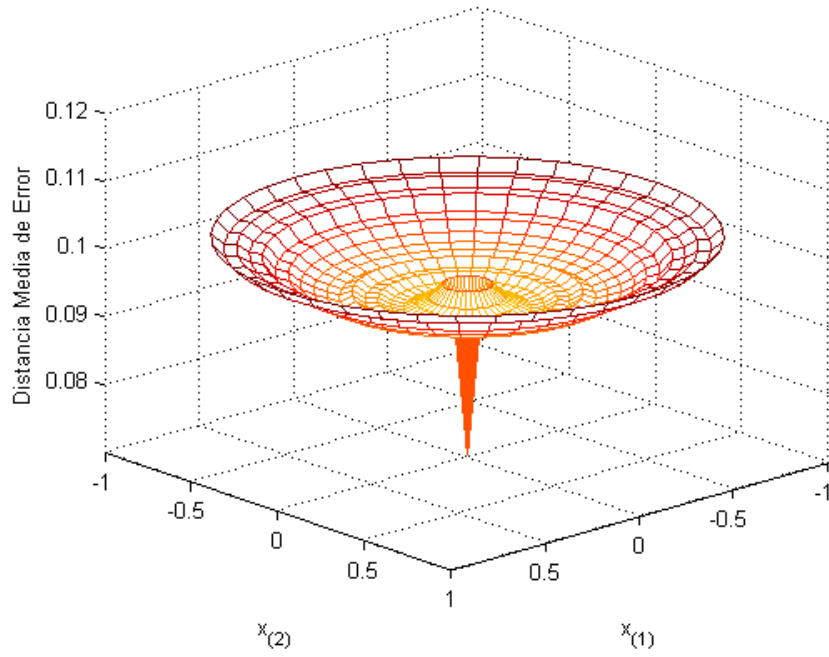


Figura 4.53: Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador ML, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma circular y sin corrección de la estimación final.

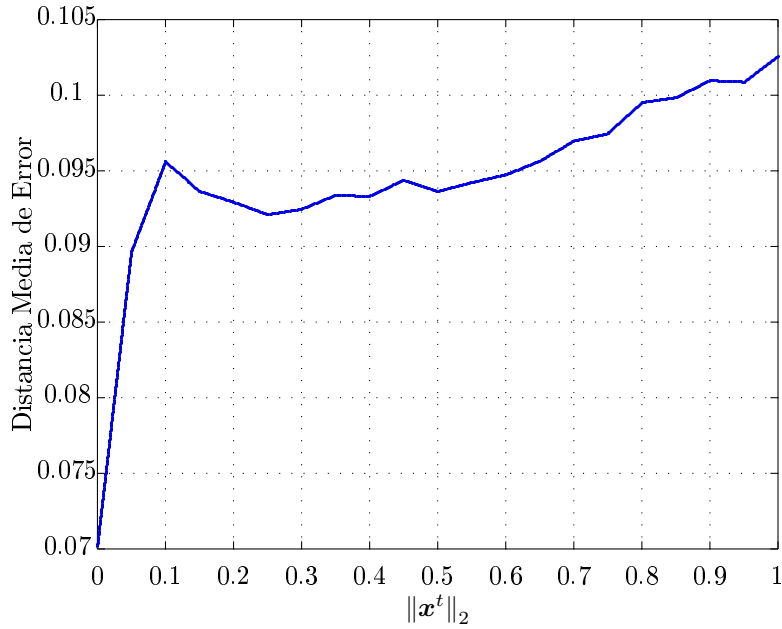


Figura 4.54: Sección de la Figura 4.53 que representa la precisión del estimador ML (sin corrección final) en una región \mathcal{D}' de forma circular, en función de la distancia del agente al origen de coordenadas. Esta sección representa un corte en la dirección de la diagonal de la región \mathcal{D}' .

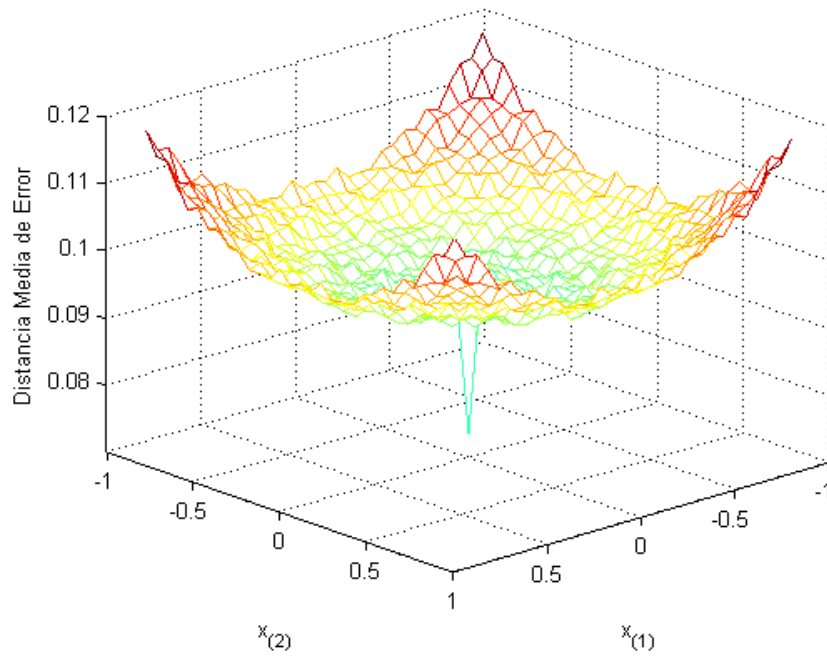


Figura 4.55: Representación del error medio de localización, obtenido con el estimador ML, en función de la posición del agente en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada y sin corrección de la estimación final.

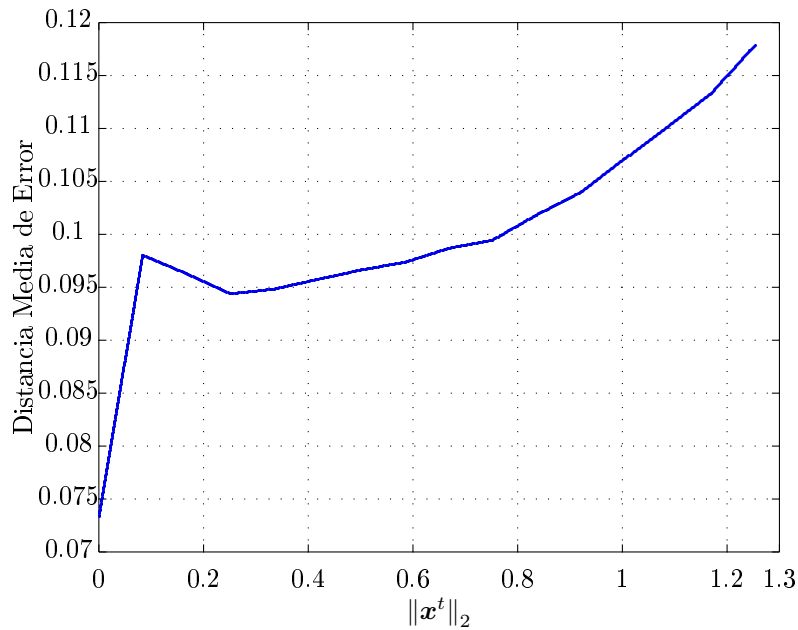


Figura 4.56: Sección de la Figura 4.55 que representa la precisión del estimador ML (sin corrección final) en una región \mathcal{D}' de forma cuadrada, en función de la distancia del agente al origen de coordenadas. Esta sección representa un corte en la dirección de la diagonal de la región \mathcal{D}' .

Capítulo 5

Conclusiones y líneas futuras

5.1. Conclusiones

En este trabajo, el principal objetivo ha sido analizar las prestaciones del problema de localización distribuida de objetivos mediante el uso de redes homogéneas de sensores binarios densamente pobladas. Para ello, se ha simulado el comportamiento de distintos métodos de estimación (denominados reglas de fusión) en función de varios parámetros de diseño de dichas redes. Estas simulaciones han permitido obtener medidas cuantitativas de la precisión de los métodos en diferentes entornos.

Los métodos de estimación estudiados han sido tres: el estimador de máxima verosimilitud, el de mínimo riesgo empírico y un método basado en distancias. Los dos primeros aparecen descritos en [Artés-Rodríguez et al., 2004], donde son aplicados para el caso en el que la probabilidad de detección de los sensores p_d se modela como una función exponencial norma 2 al cuadrado. Además de para éste, en el presente proyecto se han desarrollado dichos estimadores para otros tres modelos de p_d : sombrero cordobés, lineal y exponencial norma 2. Para ello, se han obtenido analíticamente las ecuaciones de los gradientes empleados por los dos métodos en cada caso.

Por su parte, el método basado en distancias ha sido propuesto y desarrollado en este trabajo. Además de implementarlo para todos los tipos de probabilidad de detección, también se ha propuesto una versión mejorada del mismo consistente en realizar la estimación de la posición del objetivo con un número menor de lecturas de los sensores.

Asimismo, se ha propuesto una corrección de la estimación final de todos los métodos en función de la información que se tiene a priori sobre la región de aparición del agente.

Es necesario destacar que el estudio previo sobre la tecnología de las redes de sensores denotó que uno de sus principales problemas es la gestión

de los recursos energéticos, ya que generalmente existe una gran dificultad técnica para reemplazar de baterías de los nodos. Este hecho, unido a que las aplicaciones actuales demandan mejores prestaciones y un tiempo de vida de la red cada vez mayor, provoca que el consumo de energía sea un factor crítico. Dicho problema ha sido tenido en cuenta en este proyecto, estudiando las prestaciones de las reglas de fusión en dos esquemas de transmisión diferentes: uno con ahorro energético (esquema censurado) y otro sin él. Consecuentemente, ha sido necesario obtener la formulación matemática de los estimadores para ambos escenarios.

Se han seleccionado las principales características de diseño de la red para analizar el comportamiento de las reglas de fusión en función de ellas. Para que la comparación de los resultados de las simulaciones sea válida ha sido necesario establecer de forma analítica equivalencias entre los valores de dichos parámetros de diseño, de las cuales destaca el criterio de equivalencia establecido entre los distintos tipos de p_d .

De esta forma, se ha podido comprobar como la relación entre el tamaño de la región de despliegue de los sensores \mathcal{D} y de la región de aparición del objetivo \mathcal{D}' tiene influencia en las prestaciones de la localización, obteniéndose un menor error al aumentar la diferencia de tamaño entre regiones (con ρ_s constante). Sin embargo, esta mejora no es infinita, y a partir de un cierto valor de dicha relación —cuando la distancia entre los límites de \mathcal{D} y \mathcal{D}' es igual al rango de los sensores— las prestaciones no mejoran más y el error se estabiliza.

El análisis de prestaciones del tipo de probabilidad de detección empleada no establece un resultado único para todos los estimadores estudiados, ya que el valor del rango utilizado influye de manera distinta según la p_d y el estimador.

Por otra parte, las simulaciones realizadas en función del tipo de región han demostrado que existe una pequeña diferencia de prestaciones entre redes situadas en regiones circulares y regiones cuadradas. Ésta es motivada por la pérdida de precisión que se produce cuando el objetivo se sitúa en los extremos de la región \mathcal{D}' , que es mayor en el caso cuadrado debido a la geometría de dicha región.

También se ha comprobado que la utilización de redes con despliegues ordenados produce una ligera mejora del error de localización frente a los despliegues aleatorios. Sin embargo, es necesario ponderar esta mejora respecto del incremento del coste que generalmente suponen dichos despliegues ordenados.

El análisis de prestaciones en función de las características de los sensores ha denotado que la elección de éstos tiene una importancia crucial para la precisión de los estimadores. Se han realizado análisis de la influencia de

dichas características tanto de forma marginal (análisis según la probabilidad de falsa alarma y de pérdida, y según el rango) como de forma conjunta (análisis de clases de sensores). De forma particular, se ha podido comprobar la gran importancia que tiene la elección del rango del sensor en la discriminación de la solución. Las mejores prestaciones no se logran ni con sensores con rangos muy pequeños ni con sensores con rangos muy grandes (hecho que sí ocurre en detección), sino que existe un valor óptimo intermedio que minimiza el error obtenido.

En la última simulación, se ha demostrado la influencia de la posición del agente en la precisión de la estimación. Las localizaciones realizadas cuando el objetivo se encuentra cerca del origen de la región son mucho mejores que cuando se encuentra en los extremos de ella. Este hecho se debe a que la cantidad de sensores que sitúan al agente dentro de su rango es mayor en el primer caso.

Como conclusiones generales de los estimadores estudiados se puede destacar que aquellos que disponen de todas las lecturas son más robustos, ya que la degradación de sus prestaciones es menor al empeorar las características de diseño. Este hecho se debe a que la penalización que aportan las lecturas negativas en sus correspondientes funciones de coste permite generar un mínimo o máximo más claro.

De los estimadores censurados las mejores prestaciones se consiguen, en general, con la mejora del estimador basado en distancias (DistM). Se ha comprobado, por tanto, que dicha mejora tiene un error de localización menor que su versión inicial Dist.

Es curioso destacar que, habitualmente, a diferencia de lo que ocurre en el caso sin censura (donde ML es más preciso que ERM), la versión censurada ERM_c tiene mejores prestaciones que ML_c.

Finalmente, se ha de señalar que en todos los casos el estimador ML sin censura es el mejor. La razón es que dicho estimador se caracteriza por ser:

1. asintóticamente insesgado (su estimación tiende al valor real al aumentar el número de observaciones, en nuestro caso del número de sensores),
2. asintóticamente de varianza mínima,

para distribuciones cuyo rango de valores es conocido a priori y no depende de ningún parámetro.

Sin embargo, los otros métodos de estimación propuestos —mínimo riesgo empírico y basado en distancias— no cumplen estas condiciones al ser métodos heurísticos. No obstante, en determinados escenarios, éstos resultan atractivos ya que sus prestaciones no son mucho peores que las de ML pero su carga computacional es menor.

5.2. Líneas futuras de investigación

A partir del trabajo realizado surgen diversos puntos de interés que pueden generar futuras investigaciones, entre las que podrían destacarse las siguientes:

- Localización distribuida de varios objetivos mediante una misma red de sensores.
- Implementación de la localización de un objetivo en un escenario utilizando únicamente las lecturas negativas. Esta línea fue investigada en este proyecto pero finalmente se desechó al no generarse un mínimo/máximo claro en las funciones de coste correspondientes.
- Estudio de prestaciones en modelos de redes más reales que introduzcan pérdidas en la transmisión de información de los sensores al centro de fusión (por desvanecimientos, sombras, pérdidas de trayectorias, ...). Este hecho se traduce en que no todas las lecturas que envían los sensores estén disponibles en el nodo fusor.
- Utilización de redes heterogéneas de sensores y determinación de la proporción óptima de sensores de cada clase cuando se especifica el coste total.
- Obtención de prestaciones para nuevas estrategias de ahorro energético, como por ejemplo, que no todos los sensores de la red adquieran datos en el mismo instante de muestreo, sino que exista una probabilidad de sensado p_s .
- Análisis de la precisión de las reglas de fusión con sensores que utilicen un mayor número de niveles de cuantificación, es decir, sensores que utilicen más de un bit para codificar la información del entorno.
- Comprobación mediante sensores reales de los resultados obtenidos en este trabajo.

APÉNDICES

Apéndice A

Planificación y presupuesto

En este apéndice se presenta una relación de las tareas en las que se ha dividido la realización de este Proyecto Fin de Carrera y un desglose justificado de los costes para llevarlas a cabo.

Adicionalmente, también se presenta un presupuesto total de ejecución del proyecto, incluyendo el coste de cada tarea así como de los distintos materiales utilizados.

A.1. Descomposición en tareas

Las tareas realizadas para la ejecución de este proyecto se describen a continuación, detallando la finalidad, la relación con otras tareas, la duración y el esfuerzo dedicados a cada una de ellas.

- TAREA A: DOCUMENTACIÓN.
 - Subtarea A.1: Estado del arte de las redes de sensores.
 - *Descripción:* en esta primera tarea se realiza un análisis de la tecnología de las redes de sensores, así como de sus principales características, limitaciones y aplicaciones.
 - *Objetivos:* obtener una visión general de las redes de sensores y de los problemas asociados a ellas (procesamiento de la información, gestión de energía, reglas de fusión, ...).
 - *Dependencia con otras tareas:* esta tarea dará comienzo al inicio del proyecto.
 - *Duración:* 3 semanas.
 - *Recursos:* Ingeniero 0.5 hombres/mes.

- Subtarea A.2: Localización distribuida de objetivos.
 - *Descripción:* en esta tarea se efectúa un estudio previo del problema que representa la estimación de la posición de un objetivo mediante una red de sensores que utiliza un procesamiento distribuido de la información.
 - *Objetivos:* conocer la problemática asociada a la localización distribuida y las principales reglas de fusión empleadas.
 - *Dependencia con otras tareas:* esta tarea dará comienzo tras la Tarea A.1.
 - *Duración:* 2 semanas.
 - *Recursos:* Ingeniero 0.5 hombres/mes.

■ TAREA B: FORMULACIÓN TEÓRICA.

- *Descripción:* en esta tarea se realiza el planteamiento teórico del problema de localización distribuida en redes binarias, dimensionando las características de las redes de sensores que se estudian.
- *Objetivos:* obtener la formulación matemática de los estimadores que se analizan en el proyecto y de los diferentes gradientes que necesitan algunos de ellos. Además, se debe establecer una comparación equitativa entre los valores de las características que se analizan.
- *Dependencia con otras tareas:* esta tarea dará comienzo tras la Tarea A.2.
- *Duración:* 2 semanas.
- *Recursos:* Ingeniero 0.5 hombres/mes.

■ TAREA C: DESARROLLO DEL *SOFTWARE*.

- Subtarea C.1: Escenarios.
 - *Descripción:* en esta tarea se programa con MATLAB® el *software* necesario para generar las regiones, los sensores y sus lecturas, los agentes a localizar, los tipos de probabilidad de detección y los tipos de despliegues de la red. Además se realizan funciones que proporcionen valores equivalentes entre las características de diseño, para que de esta forma, las simulaciones puedan ser comparadas entre sí.
 - *Objetivos:* implementar mediante MATLAB®, los escenarios necesarios para la realización de las simulaciones.
 - *Dependencia con otras tareas:* esta tarea dará comienzo tras la Tarea B.

- *Duración:* 2 semanas.
- *Recursos:* Ingeniero 1 hombres/mes.
- Subtarea C.2: Estimadores.
 - *Descripción:* en este caso, con ayuda de MATLAB[®], se implementan los estimadores ML, ERM, el método basado en distancias y la mejora de éste. Se programan diferentes versiones de dichos estimadores según el tipo de p_d y el esquema energético utilizado.
 - *Objetivos:* implementar mediante MATLAB[®] los estimadores que se estudian en el Proyecto Fin de Carrera.
 - *Dependencia con otras tareas:* esta tarea dará comienzo tras la Tarea C.1.
 - *Duración:* 3 semanas.
 - *Recursos:* Ingeniero 0.75 hombres/mes.
- TAREA D: OBTENCIÓN DE SIMULACIONES.
 - Subtarea D.1: Pruebas preliminares.
 - *Descripción:* en esta tarea se realiza una batería de pruebas al *software* implementado para comprobar su comportamiento y eliminar errores. Además, se decide qué simulaciones van a ser incluidas en la memoria y se generan los ficheros que las realizan.
 - *Objetivos:* comprobar el correcto funcionamiento del *software* generado y elegir las simulaciones a realizar.
 - *Dependencia con otras tareas:* esta tarea dará comienzo tras la Tarea C.2.
 - *Duración:* 2 semanas.
 - *Recursos:* Ingeniero 1 hombres/mes.
 - Subtarea D.2: Simulaciones definitivas.
 - *Descripción:* en esta ocasión, se obtienen las prestaciones de los estimadores en función de los aspectos más relevantes: tipo de p_d , tipo de región, tipo de despliegue, clase de los sensores, valor de α y β , valor del rango de los sensores y posición del objetivo a localizar.
 - *Objetivos:* generar las simulaciones más relevantes para realizar un análisis de los resultados.
 - *Dependencia con otras tareas:* esta tarea dará comienzo tras la Tarea D.1.
 - *Duración:* 5 semanas.

- *Recursos:* Ingeniero 0.5 hombres/mes.

■ TAREA E: REDACCIÓN DE LA MEMORIA.

- Subtarea E.1: Organización y estructura de la memoria del documento.
 - *Descripción:* A lo largo de esta tarea se organiza el documento, estructurándolo adecuadamente.
 - *Objetivos:* Organización y estructura de la memoria del documento.
 - *Dependencia con otras tareas:* esta tarea dará comienzo tras la Tarea D.2.
 - *Duración:* 1 semanas.
 - *Recursos:* Ingeniero 0.5 hombres/mes.
- Subtarea E.2: Realización del documento final.
 - *Descripción:* A lo largo de esta tarea se redacta el documento final del proyecto.
 - *Objetivos:* Redacción de cada uno de los capítulos y apéndices de este proyecto.
 - *Dependencia con otras tareas:* esta tarea dará comienzo tras la Tarea E.1.
 - *Duración:* 7 semanas.
 - *Recursos:* Ingeniero 0.75 hombres/mes.

■ TAREA F: PRESENTACIÓN.

- *Descripción:* en esta tarea se va a preparar la presentación de este proyecto.
- *Objetivos:* elaborar un conjunto de transparencias adecuado que permitan tener una visión clara y completa del trabajado realizado.
- *Dependencia con otras tareas:* esta tarea dará comienzo tras la Tarea E.2.
- *Duración:* 2 semanas.
- *Recursos:* Ingeniero 0.75 hombres/mes.

Tarea	Duración (semanas)	Recursos (Ing./mes)	Total (horas)
DOCUMENTACIÓN			
A.1 Estado del arte de las redes de sensores	3	0.5	60
A.2 Localización distribuida de objetivos	2	0.5	40
Total			100
FORMULACIÓN TEÓRICA			
B.1 Formulación teórica	2	0.5	40
Total			40
DESARROLLO DEL <i>SOFTWARE</i>			
C.1 Escenarios	2	1	80
C.2 Estimadores	3	0.75	90
Total			170
OBTENCIÓN DE SIMULACIONES			
D.1 Pruebas preliminares	2	1	80
D.2 Simulaciones definitivas	5	0.5	100
Total			180
REDACCIÓN DE LA MEMORIA			
E.1 Organización y estructura de la memoria	1	0.5	20
E.2 Realización del documento final	7	0.75	210
Total			230
PRESENTACIÓN			
F.1 Presentación	2	0.75	60
Total			60
Total			780

Tabla A.1: *Resumen de las tareas del proyecto.*

A.2. Recursos

En este apartado se detallan los recursos empleados para realizar este Proyecto Fin de Carrera:

- Recursos materiales:
 1. Ordenador de sobremesa con procesador *Intel® Pentium 4* 1.73 GHz. 2 GB RAM. Sistema operativo *Windows® XP*.
 2. Programa MATLAB® versión R2008b.
- Recursos de trabajo: 1 Ingeniero de telecomunicaciones.

A.3. Planificación con el diagrama de fases de ejecución detallado

En este apartado se muestra el diagrama de *Gantt* de las principales tareas (Figura A.1), así como una planificación detallada de todas las fases del proyecto (Figura A.2).

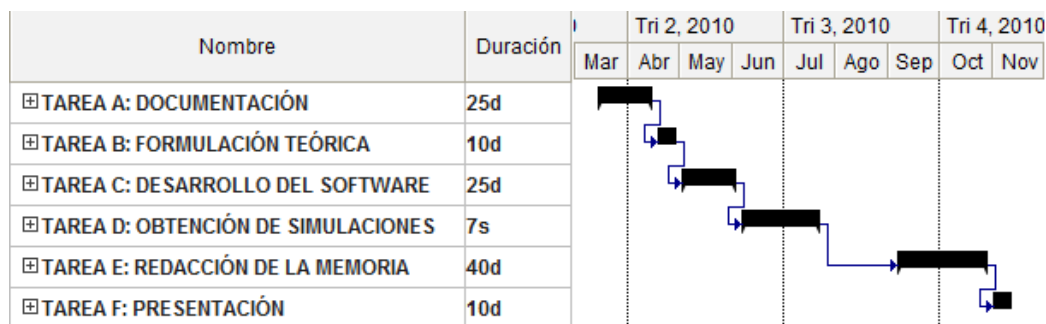


Figura A.1: Diagrama de Gantt de las principales tareas.

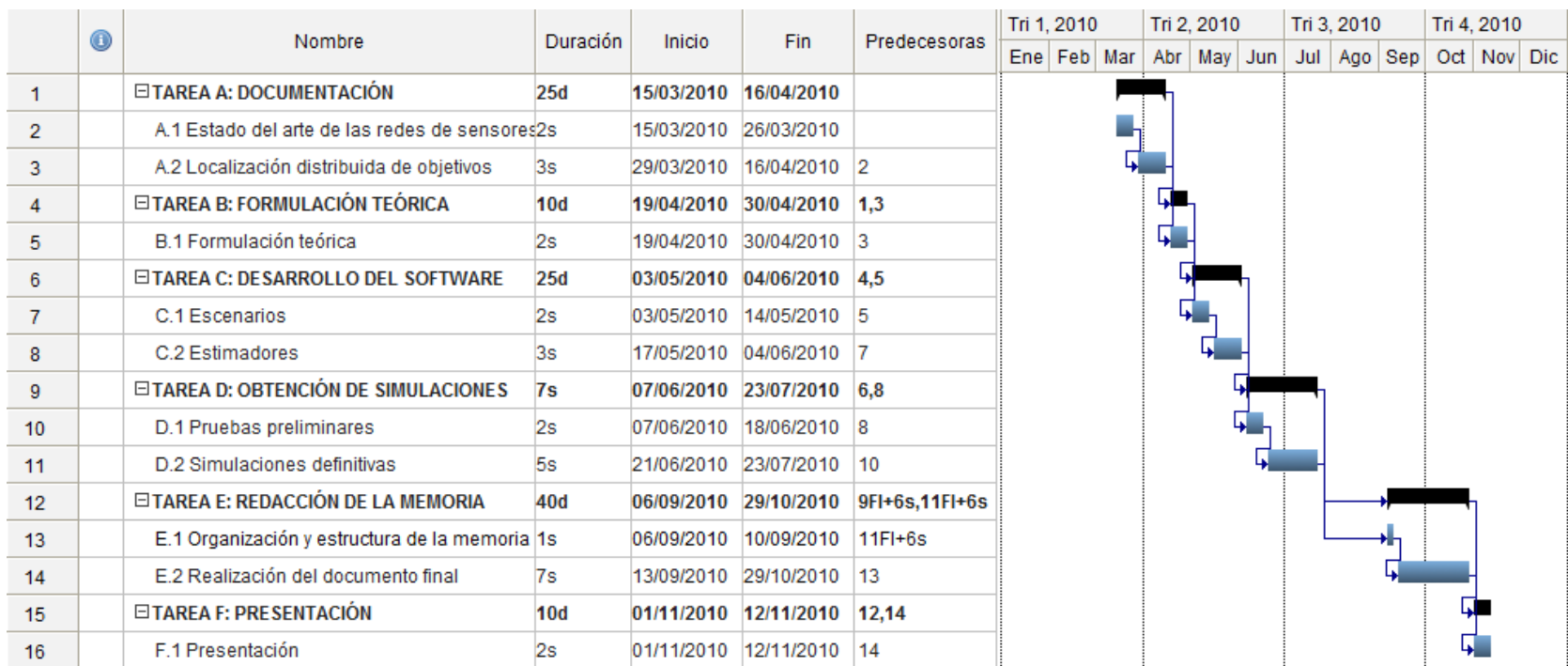


Figura A.2: Diagrama de Gantt detallado de la planificación del proyecto.

A.4. Presupuesto de proyecto

1. **Autor:** Raúl Sesmero Ramos.
2. **Departamento:** Teoría de la Señal y Comunicaciones (TSC).
3. **Descripción del proyecto:**
 - *Título:* Localización distribuida en redes de sensores binarias.
 - *Duración:* 8 meses.
 - *Tasa de costes indirectos:* no se especifican.
4. **Presupuesto total del proyecto (valorado en Euros):** 16700 €.

Concepto	Cantidad	Coste (€)	Total (€)
Recursos materiales			
Ordenador de sobremesa	1	600	600
Licencia MATLAB®	1	500	500
Total			1100
Recursos de trabajo			
Ingeniero de telecomunicaciones	1 (780 horas)	20 €/hora	15600
Total			15600
Otros			
Documentación	-	-	-
Reuniones	-	-	-
Total			-
Total			16700

Tabla A.2: *Desglose presupuesto.*

5. **Subcontratación de tareas:** no se especifican.
6. **Otros costes directos del proyecto:** no se especifican.

Apéndice B

Equivalencia entre probabilidades de detección

En este segundo apéndice se explica el desarrollo de las ecuaciones de los parámetros θ y r_o que hacen posible una comparación razonable entre las probabilidades de detección.

Como se explicó en la Sección 3.2, el criterio utilizado es que en el rango del sensor, el volumen encerrado por la superficie $g(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i)$ sea el mismo para todos los tipos de probabilidades de detección.¹

En el caso de los tipos *sombrero cordobés* y lineal, esta región se define como:

$$\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2 \leq r_o\}, \quad (\text{B.1})$$

donde \mathbf{x} son las coordenadas de cualquier punto del espacio, \mathbf{x}_i representa las coordenadas de la posición de un sensor y r_o el parámetro que determina el rango del mismo. Sin embargo, en las probabilidades de tipo exponencial esta región se define como:

$$\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2 \leq d_o\}, \quad (\text{B.2})$$

teniendo \mathbf{x} y \mathbf{x}_i el mismo significado, y siendo d_o la distancia a la que p_d tiene un valor un 1 % mayor que el valor de falsa alarma.

Asimismo, se puede observar que en todos los tipos de probabilidades de detección se tienen volúmenes de revolución. Estos volúmenes se engendran por la revolución de una curva $f(l)$ alrededor del eje OY, pudiéndose calcular de forma general como:

$$V = 2\pi \int_a^b l f(l) dl. \quad (\text{B.3})$$

Definiendo $l = \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2$ y $f(l) = g(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i)$ es posible aplicar dicha ecuación para los casos de estudio.

¹Definiendo $g(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i) = p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha$.

B.1. Probabilidad tipo *sombrero cordobés*

En este primer caso, la superficie a estudio tiene la forma:

$$p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha = \begin{cases} (1 - \alpha - \beta) & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Utilizando la Ecuación (B.3), se obtiene el volumen en la región próxima al sensor (definida en (B.1)):

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{r_o} (p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha) l \, dl = 2\pi \int_0^{r_o} (1 - \alpha - \beta) l \, dl = \\ &= 2\pi (1 - \alpha - \beta) \frac{r_o^2}{2} = \pi r_o^2 (1 - \alpha - \beta). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Despejando, se halla el valor de r_o para este caso:

$$r_o = \sqrt{\frac{V}{\pi(1 - \alpha - \beta)}}. \quad (\text{B.6})$$

B.2. Probabilidad tipo lineal

En el caso lineal, la superficie $g(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i)$ tiene la forma:

$$p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha = \begin{cases} \frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \alpha - \beta & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Aplicando la Ecuación (B.3) para el cálculo del volumen:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{r_o} (p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha) l \, dl = 2\pi \int_0^{r_o} \left[\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} l^2 + (1 - \alpha - \beta) l \right] dl = \\ &= 2\pi \left[\frac{(\alpha + \beta - 1)}{r_o} \cdot \frac{r_o^3}{3} + (1 - \alpha - \beta) \frac{r_o^2}{2} \right] = \pi r_o^2 \left[\left(\frac{-2}{3} + 1 \right) (1 - \alpha - \beta) \right] = \\ &= \frac{\pi r_o^2}{3} (1 - \alpha - \beta). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Finalmente, despejando se obtiene el valor de r_o para este caso:

$$r_o = \sqrt{\frac{3V}{\pi(1-\alpha-\beta)}}. \quad (\text{B.9})$$

B.3. Probabilidad tipo exponencial norma 2 al cuadrado

En tercer lugar, se calcula el parámetro θ para el caso exponencial al cuadrado. En primer lugar, se define la forma de $g(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i)$ en este caso:

$$p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha = (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2} \quad \text{para todo } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2. \quad (\text{B.10})$$

Además, se calcula el valor del punto d_o que delimita el rango del sensor en este caso:

$$\begin{aligned} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) = 1.01\alpha &\Rightarrow p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha = 0.01\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow d_o = \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 &= \sqrt{\frac{-1}{\theta} \ln \left(\frac{0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Utilizando la Ecuación (B.3) se calcula el volumen encerrado:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{d_o} (p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha) l \, dl = 2\pi \int_0^{d_o} (1 - \alpha - \beta) l e^{-\theta l^2} \, dl = \\ &= 2\pi (1 - \alpha - \beta) \left[\frac{-e^{-\theta l^2}}{2\theta} \right]_0^{d_o} = \frac{\pi}{\theta} (1 - \alpha - \beta) [1 - e^{-\theta d_o^2}]. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Sustituyendo el valor de d_o dado por (B.11) en (B.12), V queda como:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{\theta} (1 - \alpha - \beta) \left[1 - e^{-\theta \frac{-1}{\theta} \ln \left(\frac{0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right)} \right] = \frac{\pi}{\theta} (1 - \alpha - \beta) \left[1 - \left(\frac{0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right) \right] = \\ &= \frac{\pi}{\theta} (1 - \alpha - \beta) \left[\frac{1 - \alpha - \beta - 0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right] = \frac{\pi}{\theta} [1 - 1.01\alpha - \beta]. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Por último, se obtiene el valor de θ para este caso:

$$\theta = \frac{\pi}{V} \left[1 - 1.01\alpha - \beta \right]. \quad (\text{B.14})$$

B.4. Probabilidad tipo exponencial norma 2

Finalmente, la función $g(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i)$ se expresa matemáticamente como:

$$p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha = (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} \quad \text{para todo } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2. \quad (\text{B.15})$$

Por otro lado, se calcula el valor del punto d_o , que es el límite del rango definido por (B.2). Dicho punto es aquel donde el valor de la función p_d es un 1 % mayor que el valor de falsa alarma (α):

$$\begin{aligned} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) = 1.01\alpha &\Rightarrow p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha = 0.01\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow d_o = \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 &= \frac{-1}{\theta} \ln \left(\frac{0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Utilizando la Ecuación (B.3) para el cálculo del volumen encerrado se obtiene:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{d_o} (p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \alpha) l \, dl = 2\pi \int_0^{d_o} (1 - \alpha - \beta) l e^{-\theta l} \, dl = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = l \\ du = dl \\ dv = e^{-\theta l} dl \\ v = \frac{-e^{-\theta l}}{\theta} \end{array} \right] = 2\pi (1 - \alpha - \beta) \left[\left[l \left(\frac{-e^{-\theta l}}{\theta} \right) \right]_0^{d_o} - \int_0^{d_o} \frac{-e^{-\theta l}}{\theta} \, dl \right] = \\ &= 2\pi (1 - \alpha - \beta) \left[\frac{-l e^{-\theta l}}{\theta} - \frac{e^{-\theta l}}{\theta^2} \right]_0^{d_o} = 2\pi (1 - \alpha - \beta) \left[\frac{-d_o e^{-\theta d_o}}{\theta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-\theta d_o}}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} \right] = \frac{2\pi}{\theta^2} (1 - \alpha - \beta) \left[1 - (1 + d_o \theta) e^{-\theta d_o} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Sustituyendo el valor de d_o dado por (B.16) en (B.17):

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{2\pi}{\theta^2}(1 - \alpha - \beta) \left[1 - \left(1 + \theta \frac{-1}{\theta} \ln \left(\frac{0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right) \right) e^{-\theta \frac{-1}{\theta} \ln \left(\frac{0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right)} \right] = \\
 &= \frac{2\pi}{\theta^2}(1 - \alpha - \beta) \left[1 - \left(1 - \ln \left(\frac{0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right) \right) \frac{0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right] = \\
 &= \frac{2\pi}{\theta^2}(1 - \alpha - \beta) \left[\frac{1 - \alpha - \beta - 0.01\alpha \left(1 - \ln \left(\frac{0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right) \right)}{1 - \alpha - \beta} \right] = \\
 &= \frac{2\pi}{\theta^2} \left[1 + 0.01\alpha \ln \left(\frac{0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right) - 1.01\alpha - \beta \right]. \tag{B.18}
 \end{aligned}$$

Despejando, se obtiene el valor deseado de θ :

$$\theta = \sqrt{\frac{2\pi}{V} \left[1 + 0.01\alpha \ln \left(\frac{0.01\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right) - 1.01\alpha - \beta \right]}. \tag{B.19}$$

Apéndice C

Cálculo de gradientes

Tal y como se explicó en la Sección 3.4, para los estimadores de máxima verosimilitud y de mínimo riesgo empírico no existe una solución analítica. Este problema provoca que, para obtener una solución aproximada, sea necesario aplicar algoritmos de búsqueda a dichos estimadores. Concretamente, se propone utilizar una búsqueda por gradiente.

No obstante, no existe una formulación única de dicho gradiente para cada método, sino que su expresión depende la combinación de dos factores estudiados en este proyecto:

1. *Tipo de probabilidad de detección*¹: lineal, exponencial norma 2 al cuadrado y exponencial norma 2.
2. *Escenario*: con censura y sin censura.

Por lo tanto, en el siguiente apéndice, se detalla la obtención de la expresión del gradiente para todos los casos que se contemplan en este estudio.

C.1. Gradientes para la probabilidad de tipo lineal

En primer lugar, se desarrollan los gradientes para una p_d de tipo lineal, con la forma:

$$p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ \alpha & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

¹Como se describió en la Sección 3.4, al caso de la p_d de tipo *sombrero cordobés* no se le aplica la búsqueda por gradiente.

C.1.1. Máxima verosimilitud sin censura

En este escenario, el centro fusor recibe las lecturas de los N sensores, tanto las positivas como las negativas, y aplica el método de máxima verosimilitud. Partiendo de la Ecuación (3.18) del estimador ML de la Página 47, la función que debe maximizar es:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = \sum_{i:y_i=1} \ln p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) + \sum_{i:y_i=0} \ln (1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)). \quad (\text{C.2})$$

La probabilidad de detección definida en (C.1) es sustituida en la función de verosimilitud anterior, realizándose el cálculo del gradiente como la derivada de la Ecuación (C.2) respecto a la posición del agente en cada una de las dimensiones del espacio $(x_{(1)}^t, x_{(2)}^t)$. La primera componente del gradiente se formula²:

$$\begin{aligned} \nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{L} &= \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^t} \left[\sum_{\substack{i:y_i=1 \\ r_i < r_o}} \ln \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta \right) + \sum_{\substack{i:y_i=1 \\ r_i \geq r_o}} \ln \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{i:y_i=0 \\ r_i < r_o}} \ln \left(-\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + \beta \right) + \sum_{\substack{i:y_i=0 \\ r_i \geq r_o}} \ln (1 - \alpha) \right] = \\ &= \sum_{\substack{i:y_i=1 \\ r_i < r_o}} \frac{\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \cdot \frac{2(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{2[(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}}}{p_d} + \sum_{\substack{i:y_i=1 \\ r_i \geq r_o}} 0 + \\ &\quad + \sum_{\substack{i:y_i=0 \\ r_i < r_o}} \frac{-\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \cdot \frac{2(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{2[(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}}}{1 - p_d} + \sum_{\substack{i:y_i=0 \\ r_i \geq r_o}} 0 = \\ &= \frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \left[\sum_{\substack{i:y_i=1 \\ r_i < r_o}} \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{\frac{r_o}{\alpha + \beta - 1} \left[\underbrace{\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta}_{p_d} - 1 + \beta \right]} p_d \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{i:y_i=0 \\ r_i < r_o}} \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{\frac{r_o}{\alpha + \beta - 1} \left[\underbrace{\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta}_{p_d} - 1 + \beta \right]} (1 - p_d) \right] = \end{aligned}$$

²Para un mejor seguimiento del desarrollo del gradiente se denominará $p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)$ tan solo como p_d .

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \left[\sum_{\substack{i: y_i=1 \\ r_i < r_o}} \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})(1 - p_d)}{(p_d - 1 + \beta) p_d (1 - p_d)} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{i: y_i=0 \\ r_i < r_o}} \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{(p_d - 1 + \beta)(1 - p_d)} \right] = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \left[\sum_{\substack{i: y_i=1 \\ r_i < r_o}} \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{(p_d - 1 + \beta) p_d (1 - p_d)} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{i: y_i=1 \\ r_i < r_o}} \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{(p_d - 1 + \beta)(1 - p_d)} - \sum_{\substack{i: y_i=0 \\ r_i < r_o}} \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{(p_d - 1 + \beta)(1 - p_d)} \right] = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \left[\sum_{i=1}^N \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{(p_d - 1 + \beta) p_d (1 - p_d)} y_i d_i - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^N \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{(p_d - 1 + \beta)(1 - p_d)} d_i \right] = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \left[\sum_{i=1}^N (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) c_i y_i d_i - \sum_{i=1}^N (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) k_i d_i \right] = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \left[\sum_{i=1}^N (x_{(1)}^t c_i y_i d_i - x_{i(1)} c_i y_i d_i - x_{(1)}^t k_i d_i + x_{i(1)} k_i d_i) \right].
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Los parámetros que aparecen en la anterior expresión se establecen como:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \tag{C.4}$$

$$k_i = \frac{1}{(1 - p_d)(p_d - 1 + \beta)} \tag{C.5}$$

y

$$c_i = k_i / p_d. \tag{C.6}$$

La ecuación obtenida en (C.3), puede ser expresada de manera más compacta de forma matricial. Para ello es necesario definir una serie de vectores que aparecen en la Tabla C.1.

Vector	Dimensiones	Elementos
$\mathbf{X}_{(1)}$	$1 \times N$	$x_{i(1)}$
\mathbf{d}	$N \times 1$	d_i
\mathbf{k}	$N \times 1$	k_i
\mathbf{c}	$N \times 1$	c_i
\mathbf{k}_d	$N \times 1$	$k_{di} = k_i d_i$
\mathbf{y}_d	$N \times 1$	$y_{di} = y_i d_i$
\mathbf{y}_{cd}	$N \times 1$	$y_{cdi} = y_i c_i d_i$

Tabla C.1: Vectores del gradiente para ML con p_d de tipo lineal.

De esta forma, la Ecuación (C.3) puede ser reescrita tal y como aparece a continuación:

$$\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{L} = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \left[x_{(1)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y}_d - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{y}_{cd} - x_{(1)}^t \mathbf{k}^T \mathbf{d} + \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{k}_d \right]. \quad (\text{C.7})$$

Análogamente, derivando la función de verosimilitud (C.2) respecto a la segunda dimensión de \mathbf{x}^t , se obtiene la segunda componente del gradiente. Expresándola en forma matricial:

$$\nabla_{x_{(2)}^t} \mathbf{L} = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \left[x_{(2)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y}_d - \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{y}_{cd} - x_{(2)}^t \mathbf{k}^T \mathbf{d} + \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{k}_d \right]. \quad (\text{C.8})$$

Por último, si \mathbf{X} es definido como la matriz $2 \times N$ cuyas columnas son las coordenadas de los sensores de la red y \mathbf{x}^t se establece como un vector columna de dimensiones 2×1 , entonces es posible obtener una expresión final para el gradiente $\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t)$ a partir de las componentes (C.7) y (C.8) calculadas. Dicho gradiente es un vector 2×1 de la forma:

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \left[\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y}_d - \mathbf{X} \mathbf{y}_{cd} - \mathbf{x}^t \mathbf{k}^T \mathbf{d} + \mathbf{X} \mathbf{k}_d \right]. \quad (\text{C.9})$$

C.1.2. Máxima verosimilitud con censura

En esta ocasión, el fusor sólo recibe las N_u lecturas de los sensores que han detectado al agente en su rango ($y_i = 1$). Por lo tanto, la función a maximizar, que se extrae de la Ecuación (3.28) de la Página 51, es:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = \sum_{i: y_i=1} \ln p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha). \quad (\text{C.10})$$

Al igual que en el caso sin censura, se sustituye la p_d definida en (C.1) en la Ecuación (C.10) de la verosimilitud, y se calculan las dos componentes del gradiente derivando dicha expresión respecto a la posición del agente en cada una de las dimensiones del espacio:

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{L} &= \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^t} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ r_i < r_o}}^{N_u} \ln \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ r_i \geq r_o}}^{N_u} \ln \alpha \right] = \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ r_i < r_o}}^{N_u} \frac{\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \cdot \frac{2(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{2[(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}}}{p_d} + \sum_{\substack{i=1 \\ r_i \geq r_o}}^{N_u} 0 = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right) \sum_{\substack{i=1 \\ r_i < r_o}}^{N_u} \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{\frac{r_o}{\alpha + \beta - 1} \left[\underbrace{\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta}_{p_d} - 1 + \beta \right] p_d} = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \sum_{\substack{i=1 \\ r_i < r_o}}^{N_u} (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \underbrace{\frac{1}{(p_d - 1 + \beta) p_d}}_{l_i} = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \sum_{i=1}^{N_u} (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) l_i d_i = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \sum_{i=1}^{N_u} (x_{(1)}^t l_i d_i - x_{i(1)} l_i d_i), \tag{C.11}
\end{aligned}$$

siendo:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{C.12}$$

y

$$l_i = \frac{1}{p_d (p_d - 1 + \beta)}. \tag{C.13}$$

Definiendo los vectores que aparecen en la Tabla C.2, la primera componente del gradiente puede expresarse de forma matricial como:

$$\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{L} = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 [x_{(1)}^t \mathbf{l}^T \mathbf{d} - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{l} \mathbf{d}]. \tag{C.14}$$

Vector	Dimensiones	Elementos
$\mathbf{X}_{(1)}$	$1 \times N_u$	$x_{i(1)}$ (con $y_i = 1$)
\mathbf{d}	$N_u \times 1$	d_i
\mathbf{l}	$N_u \times 1$	l_i
\mathbf{l}_d	$N_u \times 1$	$l_{di} = l_i d_i$

Tabla C.2: *Vectores del gradiente para ML censurado con p_d de tipo lineal.*

Análogamente, se obtiene la segunda componente del gradiente buscado:

$$\nabla_{\mathbf{x}_{(2)}^t} \mathbf{L} = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 [\mathbf{x}_{(2)}^t \mathbf{l}^T \mathbf{d} - \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{l}_d]. \quad (\text{C.15})$$

Finalmente, el gradiente $\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t)$ que se obtiene (vector 2×1), definiendo \mathbf{X} como la matriz $2 \times N_u$ cuyas columnas son las coordenadas de los sensores de la red que han realizado una lectura positiva, y \mathbf{x}^t como un vector columna de dimensiones 2×1 , es:

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 [\mathbf{x}^t \mathbf{l}^T \mathbf{d} - \mathbf{X} \mathbf{l}_d]. \quad (\text{C.16})$$

C.1.3. Riesgo empírico sin censura

En tercer lugar, se establece un escenario en el que el fusor recibe las N lecturas de todos los sensores de la red, y aplica el método ERM para estimar la posición del agente. Dicha estimación será aquella posición \mathbf{x}^t que minimice la función de riesgo:

$$\mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \sum_{i:y_i=0} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \sum_{i:y_i=1} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha). \quad (\text{C.17})$$

Al igual que en los casos anteriores, se sustituye la fórmula de la probabilidad de detección de tipo lineal (C.1) en la función de riesgo empírico (C.17), para posteriormente, derivar dicha expresión respecto a \mathbf{x}^t y así obtener el gradiente de la función de riesgo. La primera componente del gradiente resulta:

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{R}_e &= \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^t} \left[\sum_{\substack{i:y_i=0 \\ r_i < r_o}} \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta \right) + \sum_{\substack{i:y_i=0 \\ r_i \geq r_o}} \alpha - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{i:y_i=1 \\ r_i < r_o}} \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta \right) - \sum_{\substack{i:y_i=1 \\ r_i \geq r_o}} \alpha \right] = \\
&= \sum_{\substack{i:y_i=0 \\ r_i < r_o}} \frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \cdot \frac{2(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{2[(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}} + \sum_{\substack{i:y_i=0 \\ r_i \geq r_o}} 0 - \\
&\quad - \sum_{\substack{i:y_i=1 \\ r_i < r_o}} \frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \cdot \frac{2(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{2[(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 - (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}} - \sum_{\substack{i:y_i=1 \\ r_i \geq r_o}} 0 = \\
&= \frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \left[\sum_{\substack{i:y_i=0 \\ r_i < r_o}} \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{\frac{r_o}{\alpha + \beta - 1} \left[\underbrace{\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta}_{p_d} - 1 + \beta \right]} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{i:y_i=1 \\ r_i < r_o}} \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{\frac{r_o}{\alpha + \beta - 1} \left[\underbrace{\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta}_{p_d} - 1 + \beta \right]} \right] = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \left[\sum_{\substack{i:y_i=0 \\ r_i < r_o}} \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{(p_d - 1 + \beta)} - \sum_{\substack{i:y_i=1 \\ r_i < r_o}} \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{(p_d - 1 + \beta)} \right] = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \left[\sum_{\substack{i:y_i=0 \\ r_i < r_o}} (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) c_i - \sum_{\substack{i:y_i=1 \\ r_i < r_o}} (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) c_i \right] = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \left[\sum_{i=1}^N (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) c_i (1 - y_i) d_i - \sum_{i=1}^N (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) c_i y_i d_i \right].
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Definiendo los parámetros que aparecen en la expresión como:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{C.19}$$

y

$$c_i = \frac{1}{(p_d - \alpha + \beta)}. \tag{C.20}$$

Además, es posible expresar de forma matricial esta expresión del gradiente, definiendo los vectores que aparecen en la Tabla C.3.

Vector	Dimensiones	Elementos
$\mathbf{X}_{(1)}$	$1 \times N$	$x_{i(1)}$
\mathbf{c}	$N \times 1$	c_i
\mathbf{y}_d	$N \times 1$	$y_{di} = y_i d_i$
\mathbf{y}_{cd}	$N \times 1$	$y_{cdi} = y_i c_i d_i$
$[\mathbf{1} - \mathbf{y}]_d$	$N \times 1$	$[1 - y]_{di} = d_i(1 - y_i)$
$[\mathbf{1} - \mathbf{y}]_{cd}$	$N \times 1$	$[1 - y]_{cdi} = c_i d_i(1 - y_i)$

Tabla C.3: *Vectores del gradiente para ERM con p_d de tipo lineal.*

Por lo tanto, la expresión de la primera componente del gradiente, en forma matricial, resulta:

$$\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{R}_e = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 [-x_{(1)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y}_d + \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{y}_{cd} + x_{(1)}^t \mathbf{c}^T [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_d - \mathbf{X}_{(1)} [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_{cd}]. \quad (\text{C.21})$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene la segunda componente del gradiente:

$$\nabla_{x_{(2)}^t} \mathbf{R}_e = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 [-x_{(2)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y}_d + \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{y}_{cd} + x_{(2)}^t \mathbf{c}^T [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_d - \mathbf{X}_{(2)} [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_{cd}]. \quad (\text{C.22})$$

Finalmente, si \mathbf{X} es definido como la matriz $2 \times N$ cuyas columnas son las coordenadas de los sensores de la red y \mathbf{x}^t se establece como un vector columna de dimensiones 2×1 , entonces es posible obtener una expresión final compacta para el gradiente $\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t)$. Dicho gradiente es un vector 2×1 de la forma:

$$\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 [-\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y}_d + \mathbf{X} \mathbf{y}_{cd} + \mathbf{x}^t \mathbf{c}^T [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_d - \mathbf{X} [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_{cd}]. \quad (\text{C.23})$$

C.1.4. Riesgo empírico con censura

La expresión a minimizar en este caso es extraída de la Ecuación (3.51) del estimador ERM para el caso censurado:

$$\mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \sum_{i: y_i=1} -p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha). \quad (\text{C.24})$$

Las lecturas recibidas en este escenario son únicamente las N_u de los sensores que han detectado positivamente al agente. La expresión del gradiente se obtiene, al igual que los casos anteriores, sustituyendo la p_d de tipo lineal en la función de riesgo (C.24), y calculando su derivada respecto a \mathbf{x}^t :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}_{(1)}^t} \mathbf{R}_e &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{(1)}^t} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ r_i < r_o}}^{N_u} - \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ r_i \geq r_o}}^{N_u} -\alpha \right] = \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ r_i < r_o}}^{N_u} \frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \cdot \frac{-2(\mathbf{x}_{(1)}^t - \mathbf{x}_{i(1)})}{2[(\mathbf{x}_{(1)}^t - \mathbf{x}_{i(1)})^2 + (\mathbf{x}_{(2)}^t - \mathbf{x}_{i(2)})^2]^{1/2}} - \sum_{\substack{i=1 \\ r_i \geq r_o}}^{N_u} 0 = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right) \sum_{\substack{i=1 \\ r_i < r_o}}^{N_u} \frac{-(\mathbf{x}_{(1)}^t - \mathbf{x}_{i(1)})}{\frac{r_o}{\alpha + \beta - 1} \underbrace{\left[\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 + 1 - \beta - 1 + \beta \right]}_{p_d}} = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \sum_{\substack{i=1 \\ r_i < r_o}}^{N_u} \frac{(\mathbf{x}_{(1)}^t - \mathbf{x}_{i(1)})}{(p_d - 1 + \beta)} = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \sum_{\substack{i=1 \\ r_i < r_o}}^N -(\mathbf{x}_{(1)}^t - \mathbf{x}_{i(1)}) c_i = \\
&= \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 \sum_{i=1}^{N_u} (-\mathbf{x}_{(1)}^t c_i d_i + \mathbf{x}_{i(1)} c_i d_i). \tag{C.25}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 < r_o \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{C.26}$$

y

$$c_i = \frac{1}{(p_d - \alpha + \beta)}. \tag{C.27}$$

Mediante la definición de los vectores que aparecen en la Tabla C.4, la ecuación de la primera coordenada del gradiente puede expresarse de forma matricial como:

$$\nabla_{\mathbf{x}_{(1)}^t} \mathbf{R}_e = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 [-\mathbf{x}_{(1)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{d} + \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{c}_d]. \tag{C.28}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que con la primera componente del gradiente, la expresión de la segunda resulta:

$$\nabla_{\mathbf{x}_{(2)}^t} \mathbf{R}_e = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 [-\mathbf{x}_{(2)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{d} + \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{c}_d]. \tag{C.29}$$

Vector	Dimensiones	Elementos
$\mathbf{X}_{(1)}$	$1 \times N_u$	$x_{i(1)}$ (con $y_i = 1$)
\mathbf{d}	$N_u \times 1$	d_i
\mathbf{c}	$N_u \times 1$	c_i
$\mathbf{c_d}$	$N_u \times 1$	$c_{di} = c_i d_i$

Tabla C.4: Vectores del gradiente para ERM censurado con p_d de tipo lineal.

La expresión final del gradiente $\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t)$ (vector 2×1) se obtiene definiendo \mathbf{X} como la matriz $2 \times N_u$ cuyas columnas son las coordenadas de los sensores de la red que han realizado una lectura positiva, y \mathbf{x}^t como un vector columna de dimensiones 2×1 .

$$\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{r_o} \right)^2 [-\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{d} + \mathbf{X} \mathbf{c_d}]. \quad (\text{C.30})$$

C.2. Gradientes para la probabilidad de tipo exponencial cuadrado

En el siguiente apartado del anexo, se muestra la obtención de las expresiones del gradiente de los distintos métodos en el caso de que la probabilidad de detección de los sensores se rija por una función exponencial norma 2 al cuadrado. Tal y como se detalló anteriormente, dicha p_d es de la forma:

$$\begin{aligned} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) &= \alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2} = \\ &= \alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]}. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

C.2.1. Máxima verosimilitud sin censura

En el primer escenario de estudio, el centro fusor recibe las lecturas de los N sensores, tanto las positivas ($y_i = 1$) como las negativas ($y_i = 0$), y aplica el método de máxima verosimilitud. La expresión que el estimador debe maximizar, en este caso, es:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = \sum_{i:y_i=1} \ln p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) + \sum_{i:y_i=0} \ln (1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)). \quad (\text{C.32})$$

A continuación, se calcula el gradiente de la verosimilitud dada aplicando el operador nabla sobre la variable \mathbf{x}^t . La primera componente del gradiente se obtiene como:

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{L} &= \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^t} \left[\sum_{i:y_i=1} \ln \left(\alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i:y_i=0} \ln \left(1 - \alpha - (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]} \right) \right] = \\
&= \sum_{i:y_i=1} \frac{-2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})(1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]}}{p_d} + \\
&\quad + \sum_{i:y_i=0} \frac{2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})(1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]}}{1 - p_d} = \\
&= \sum_{i:y_i=1} -2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \frac{p_d - \alpha}{p_d} + \sum_{i:y_i=0} 2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \frac{p_d - \alpha}{1 - p_d} = \\
&= \sum_{i:y_i=1} -2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \frac{(p_d - \alpha)(1 - p_d)}{p_d(1 - p_d)} + \sum_{i:y_i=0} 2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \frac{p_d - \alpha}{1 - p_d} = \\
&= \sum_{i:y_i=1} -2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \frac{p_d - \alpha}{p_d(1 - p_d)} + \sum_{i:y_i=1} 2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \frac{p_d - \alpha}{1 - p_d} + \\
&\quad + \sum_{i:y_i=0} 2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \frac{p_d - \alpha}{1 - p_d} = \\
&= \sum_{i:y_i=1} -2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \underbrace{\frac{p_d - \alpha}{p_d(1 - p_d)}}_{c_i} + \sum_{i=1}^N 2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \underbrace{\frac{p_d - \alpha}{1 - p_d}}_{k_i} = \\
&= \sum_{i=1}^N -2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) c_i y_i + \sum_{i=1}^N 2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) k_i = \\
&= -2\theta \left[\sum_{i=1}^N (x_{(1)}^t c_i y_i - x_{i(1)} c_i y_i - x_{(1)}^t k_i + x_{i(1)} k_i) \right]. \tag{C.33}
\end{aligned}$$

Estableciendo en la expresión anterior:

$$k_i = \frac{p_d - \alpha}{(1 - p_d)} \tag{C.34}$$

y

$$c_i = k_i / p_d. \tag{C.35}$$

La ecuación de esta componente del gradiente se expresa en forma matricial como:

$$\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{L} = -2\theta \left[x_{(1)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{y}_c - x_{(1)}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{k} \right], \quad (\text{C.36})$$

donde los vectores utilizados se definen en la Tabla C.5.

Vector	Dimensiones	Elementos
$\mathbf{X}_{(1)}$	$1 \times N$	$x_{i(1)}$
$\mathbf{1}$	$N \times 1$	1
\mathbf{y}	$N \times 1$	y_i
\mathbf{k}	$N \times 1$	k_i
\mathbf{c}	$N \times 1$	c_i
\mathbf{y}_c	$N \times 1$	$y_{ci} = y_i c_i$

Tabla C.5: Vectores del gradiente para ML con p_d de tipo exponencial al cuadrado.

Empleando el mismo procedimiento se obtiene la otra componente del gradiente buscado, resultando:

$$\nabla_{x_{(2)}^t} \mathbf{L} = -2\theta \left[x_{(2)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{y}_c - x_{(2)}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{k} \right]. \quad (\text{C.37})$$

Fijando la matriz \mathbf{X} como aquella de dimensiones $2 \times N$, cuyas columnas corresponden con las coordenadas de los sensores de la red \mathbf{x}_i , y siendo \mathbf{x}^t un vector columna de dimensiones 2×1 , la expresión final para el gradiente $\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t)$ (vector 2×1) queda:

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = -2\theta \left[\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{y}_c - \mathbf{x}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X} \mathbf{k} \right]. \quad (\text{C.38})$$

C.2.2. Máxima verosimilitud con censura

En este escenario, el fusor sólo recibe las N_u lecturas de los sensores que han detectado al agente en su rango ($y_i = 1$). La función de verosimilitud a maximizar es:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = \sum_{i: y_i=1} \ln p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha). \quad (\text{C.39})$$

Derivando dicha función de verosimilitud respecto a \mathbf{x}^t , se obtiene la expresión del gradiente. Su primera coordenada se calcula:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{L} &= \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^t} \left[\sum_{i=1}^{N_u} \ln \left(\alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]} \right) \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^{N_u} \frac{-2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]}}{p_d} = \\
 &= \sum_{i=1}^{N_u} -2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \frac{p_d - \alpha}{p_d} = \sum_{i=1}^{N_u} -2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \frac{(p_d - \alpha)(1 - p_d)}{p_d(1 - p_d)} = \\
 &= \sum_{i=1}^{N_u} -2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \underbrace{\frac{p_d - \alpha}{p_d(1 - p_d)}}_{c_i} + \sum_{i=1}^{N_u} 2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \underbrace{\frac{p_d - \alpha}{1 - p_d}}_{k_i} = \\
 &= -2\theta \left[\sum_{i=1}^{N_u} (x_{(1)}^t c_i - x_{i(1)} c_i - x_{(1)}^t k_i + x_{i(1)} k_i) \right]. \tag{C.40}
 \end{aligned}$$

Teniendo en consideración que los parámetros representan:

$$k_i = \frac{p_d - \alpha}{(1 - p_d)} \tag{C.41}$$

y

$$c_i = k_i / p_d. \tag{C.42}$$

En notación matricial, la Ecuación (C.40) resulta:

$$\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{L} = -2\theta [x_{(1)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{c} - x_{(1)}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{k}], \tag{C.43}$$

donde los vectores que aparecen están definidos como:

Vector	Dimensiones	Elementos
$\mathbf{X}_{(1)}$	$1 \times N_u$	$x_{i(1)}$ (con $y_i = 1$)
$\mathbf{1}$	$N_u \times 1$	1
\mathbf{k}	$N_u \times 1$	k_i
\mathbf{c}	$N_u \times 1$	c_i

Tabla C.6: Vectores del gradiente para ML censurado con p_d de tipo exponencial al cuadrado.

Análogamente, se obtiene la segunda componente del gradiente para este caso:

$$\nabla_{x_{(2)}^t} \mathbf{L} = -2\theta [x_{(2)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{c} - x_{(2)}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{k}]. \tag{C.44}$$

Uniando las expresiones (C.43) y (C.44) de las componentes del gradiente, se puede formular una única ecuación para calcular el vector $\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t)$ de dimensiones 2×1 . Para ello, ha de definirse \mathbf{X} como la matriz $2 \times N_u$ cuyas columnas son las coordenadas de los sensores de la red que han realizado una lectura positiva, y \mathbf{x}^t como un vector columna de dimensiones 2×1 :

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = -2\theta [\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X} \mathbf{c} - \mathbf{x}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X} \mathbf{k}]. \quad (\text{C.45})$$

C.2.3. Riesgo empírico sin censura

En esta ocasión, el fusor recibe las N lecturas de todos los sensores de la red, y aplica el método ERM para estimar la posición del agente. La función que se ha de minimizar se define:

$$\mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \sum_{i:y_i=0} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \sum_{i:y_i=1} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha). \quad (\text{C.46})$$

Aplicando a la expresión anterior el operador nabla respecto a \mathbf{x}^t , se obtiene el gradiente para este caso. La primera componente del mismo es:

$$\begin{aligned} \nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{R}_e &= \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^t} \left[\sum_{i:y_i=0} \left(\alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i:y_i=1} \left(\alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]} \right) \right] = \\ &= \sum_{i:y_i=0} -2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]} + \\ &\quad + \sum_{i:y_i=1} 2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]} = \\ &= \sum_{i:y_i=0} -2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \underbrace{(p_d - \alpha)}_{c_i} + \sum_{i:y_i=1} 2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \underbrace{(p_d - \alpha)}_{c_i} = \\ &= \sum_{i=1}^N -2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) c_i (1 - y_i) + \sum_{i=1}^N 2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) c_i y_i = \\ &= 2\theta \left[\sum_{i=1}^N (-x_{(1)}^t c_i (1 - y_i) + x_{i(1)} c_i (1 - y_i) + x_{(1)}^t c_i y_i - x_{i(1)} c_i y_i) \right] \quad (\text{C.47}) \end{aligned}$$

Definiendo c_i como:

$$c_i = (p_d - \alpha). \quad (\text{C.48})$$

Además, es posible expresar la Ecuación (C.47) de forma matricial, mediante los vectores definidos en la Tabla C.7:

$$\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{R}_e = 2\theta \left[-x_{(1)}^t \mathbf{c}^T (\mathbf{1} - \mathbf{y}) + \mathbf{X}_{(1)} [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_c + x_{(1)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{y}_c \right]. \quad (\text{C.49})$$

Vector	Dimensiones	Elementos
$\mathbf{X}_{(1)}$	$1 \times N$	$x_{i(1)}$
$\mathbf{1}$	$N \times 1$	1
\mathbf{y}	$N \times 1$	y_i
\mathbf{c}	$N \times 1$	c_i
\mathbf{y}_c	$N \times 1$	$y_{ci} = y_i c_i$
$[\mathbf{1} - \mathbf{y}]_c$	$N \times 1$	$[1 - y]_{ci} = c_i (1 - y_i)$

Tabla C.7: Vectores del gradiente para ERM con p_d de tipo exponencial al cuadrado.

La segunda componente del gradiente se calcula de igual manera, obteniéndose:

$$\nabla_{x_{(2)}^t} \mathbf{R}_e = 2\theta \left[-x_{(2)}^t \mathbf{c}^T (\mathbf{1} - \mathbf{y}) + \mathbf{X}_{(2)} [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_c + x_{(2)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{y}_c \right]. \quad (\text{C.50})$$

Por último, dichas componentes se expresan de forma conjunta en una única ecuación, obteniéndose el vector $\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t)$ de dimensiones 2×1 . Para ello es necesario definir \mathbf{X} como la matriz $2 \times N$ cuyas columnas son las coordenadas de los sensores de la red y \mathbf{x}^t como un vector columna de dimensiones 2×1 :

$$\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = 2\theta \left[-\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T (\mathbf{1} - \mathbf{y}) + \mathbf{X} [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_c + \mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{y}_c \right]. \quad (\text{C.51})$$

C.2.4. Riesgo empírico con censura

En este último caso, el fusor aplica el estimador ERM sólo a los N_u sensores con $y_i = 1$. Por lo tanto, la función de riesgo utilizada es:

$$\mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \sum_{i: y_i=1} -p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha). \quad (\text{C.52})$$

Como en todos los apartados anteriores, se deriva esta expresión para obtener el gradiente:

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{R}_e &= \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^t} \left[\sum_{i=1}^{N_u} - \left(\alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]} \right) \right] = \\
&= \sum_{i=1}^{N_u} 2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]} = \\
&= \sum_{i=1}^{N_u} 2\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \underbrace{(p_d - \alpha)}_{c_i} = 2\theta \left[\sum_{i=1}^{N_u} (x_{(1)}^t c_i - x_{i(1)} c_i) \right], \quad (\text{C.53})
\end{aligned}$$

considerando:

$$c_i = (p_d - \alpha). \quad (\text{C.54})$$

Aplicando la definición de vectores de la Tabla C.8, se logra una expresión matricial de la primera componente del gradiente de la forma:

$$\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{R}_e = 2\theta [x_{(1)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{c}]. \quad (\text{C.55})$$

Vector	Dimensiones	Elementos
$\mathbf{X}_{(1)}$	$1 \times N_u$	$x_{i(1)}$ (con $y_i = 1$)
$\mathbf{1}$	$N_u \times 1$	1
\mathbf{c}	$N_u \times 1$	c_i

Tabla C.8: Vectores del gradiente para ERM censurado con p_d de tipo exponencial al cuadrado.

Se procede de igual forma para obtener la segunda componente del gradiente:

$$\nabla_{x_{(2)}^t} \mathbf{R}_e = 2\theta [x_{(2)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{c}]. \quad (\text{C.56})$$

Finalmente, la expresión total de gradiente para este escenario resulta un vector 2×1 :

$$\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = 2\theta [\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X} \mathbf{c}]. \quad (\text{C.57})$$

Para ello, se define \mathbf{X} como la matriz $2 \times N_u$ cuyas columnas son las coordenadas de los sensores de la red que han realizado una lectura positiva, y \mathbf{x}^t como un vector columna de dimensiones 2×1 .

C.3. Gradientes para la probabilidad de tipo exponencial

En último lugar, se desarrollan los gradientes para los casos en los que los sensores modelan su probabilidad de detección como una función exponencial norma 2. Dicha p_d tiene es de la forma:

$$\begin{aligned} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) &= \alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} = \\ &= \alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

C.3.1. Máxima verosimilitud sin censura

Al igual que ocurría en el caso de p_d lineal y exponencial al cuadrado, la función de verosimilitud que se debe maximizar es la extraída de la Ecuación (3.18) del estimador ML:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = \sum_{i:y_i=1} \ln p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) + \sum_{i:y_i=0} \ln (1 - p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha)). \quad (\text{C.59})$$

En este escenario, el fusor dispone de las lecturas de todos los sensores de la red (positivas y negativas).

Para obtener la primera componente del gradiente, se deriva la verosimilitud (C.59) —sustituyendo el valor de la p_d exponencial— respecto a la primera dimensión de la variable \mathbf{x}^t . El cálculo de dicha expresión aparece a continuación:

$$\begin{aligned} \nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{L} &= \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^t} \left[\sum_{i:y_i=1} \ln \left(\alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i:y_i=0} \ln \left(1 - \alpha - (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}} \right) \right] = \\ &= \sum_{i:y_i=1} \frac{\frac{-2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{2[(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}} (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2}}{p_d} + \\ &\quad + \sum_{i:y_i=0} \frac{\frac{2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{2[(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}} (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2}}{1 - p_d} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i:y_i=1} \frac{-\theta \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} (p_d - \alpha)}{p_d} + \sum_{i:y_i=0} \frac{\theta \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} (p_d - \alpha)}{1 - p_d} = \\
&= \sum_{i:y_i=1} \frac{-\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})(p_d - \alpha)(1 - p_d)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 p_d (1 - p_d)} + \sum_{i:y_i=0} \frac{\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})(p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 (1 - p_d)} = \\
&= \sum_{i:y_i=1} \frac{-\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})(p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 p_d (1 - p_d)} + \sum_{i:y_i=1} \frac{\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})(p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 (1 - p_d)} + \\
&\quad + \sum_{i:y_i=0} \frac{\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})(p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 (1 - p_d)} = \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{-\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})(p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 p_d (1 - p_d)} y_i + \sum_{i=1}^N \frac{\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})(p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 (1 - p_d)} = \\
&= \sum_{i=1}^N -\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) c_i y_i + \sum_{i=1}^N \theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) k_i = \\
&= -\theta \left[\sum_{i=1}^N (x_{(1)}^t c_i y_i - x_{i(1)} c_i y_i - x_{(1)}^t k_i + x_{i(1)} k_i) \right], \tag{C.60}
\end{aligned}$$

siendo:

$$k_i = \frac{(p_d - \alpha)}{(1 - p_d) \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2}, \tag{C.61}$$

$$c_i = k_i / p_d. \tag{C.62}$$

Sin embargo, si existe un sensor j -ésimo tal que su posición \mathbf{x}_j sea $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}^t$, se genera que $\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_j\|_2 = 0$, y por lo tanto, en la Ecuación (C.60) aparece una indeterminación. Ésta indeterminación, surge en el término correspondiente a la contribución del sensor j -ésimo al gradiente³.

Por lo tanto, para solucionar dicha indeterminación, el valor de la contribución de este sensor $\nabla \mathbf{L}^j$, se sustituye por una aproximación del límite de ese término:

$$\lim_{\mathbf{x}^t \rightarrow \mathbf{x}_j} \nabla_{\mathbf{x}_{(1)}^t} \mathbf{L}^j \approx \begin{cases} \frac{-\theta(p_d - \alpha)}{p_d} & \text{si } y_j = 1 \\ \frac{\theta(p_d - \alpha)}{(1 - p_d)} & \text{si } y_j = 0. \end{cases} \tag{C.63}$$

Adicionalmente, la ecuación de la primera componente gradiente puede expresarse de forma matricial como:

$$\nabla_{\mathbf{x}_{(1)}^t} \mathbf{L} = -\theta \left[x_{(1)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{y}_c - x_{(1)}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{k} \right]. \tag{C.64}$$

³El gradiente de la función verosimilitud puede ser expresado como la suma de la contribución de cada sensor \mathbf{x}_i : $\nabla \mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \nabla \mathbf{L}^i$.

Definiendo:

Vector	Dimensiones	Elementos
$\mathbf{X}_{(1)}$	$1 \times N$	$x_{i(1)}$
$\mathbf{1}$	$N \times 1$	1
\mathbf{y}	$N \times 1$	y_i
\mathbf{k}	$N \times 1$	k_i
\mathbf{c}	$N \times 1$	c_i
\mathbf{y}_c	$N \times 1$	$y_{ci} = y_i c_i$

Tabla C.9: *Vectores del gradiente para ML con p_d de tipo exponencial.*

Análogamente, se calcula la segunda componente del gradiente, obteniéndose:

$$\nabla_{x_{(2)}^t} \mathbf{L} = -\theta \left[x_{(2)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{y}_c - x_{(2)}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{k} \right]. \quad (\text{C.65})$$

En este caso, también aparece una indeterminación en el punto $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}_j$, teniendo la aproximación del límite del término correspondiente, el mismo valor que en el caso anterior (C.63).

La expresión final del gradiente (vector 2×1) en forma matricial resulta:

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = -\theta \left[\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{y}_c - \mathbf{x}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X} \mathbf{k} \right]. \quad (\text{C.66})$$

Para ello, \mathbf{X} debe ser definida como la matriz $2 \times N$ cuyas columnas son las coordenadas de los sensores de la red, \mathbf{x}^t debe establecerse como un vector columna de dimensiones 2×1 .

Además, si aparece alguna indeterminación debido al valor de la posición \mathbf{x}_j de algún sensor, su contribución al gradiente debe ser sustituida por:

$$\nabla \mathbf{L}^j = \left(\frac{-\theta(p_d - \alpha)}{p_d} y_j + \frac{\theta(p_d - \alpha)}{(1 - p_d)} (1 - y_j) \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.67})$$

C.3.2. Máxima verosimilitud con censura

En este escenario, el fusor sólo recibe las N_u lecturas de los sensores que han detectado al agente en su rango ($y_i = 1$). Por lo tanto, la función a maximizar es:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = \sum_{i:y_i=1} \ln p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha). \quad (\text{C.68})$$

Derivando la función de verosimilitud (C.68) respecto a la primera dimensión de \mathbf{x}^t , se obtiene la primera componente del gradiente:

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{L} &= \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^t} \left[\sum_{i=1}^{N_u} \ln \left(\alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] = \\
&= \sum_{i=1}^{N_u} \frac{\frac{-2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{2 [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{\frac{1}{2}}} (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2}}{p_d} = \\
&= \sum_{i=1}^{N_u} \frac{-\theta \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} (p_d - \alpha)}{p_d} = \sum_{i=1}^{N_u} \frac{-\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) (p_d - \alpha) (1 - p_d)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 p_d (1 - p_d)} = \\
&= \sum_{i=1}^{N_u} \frac{-\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) (p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 p_d (1 - p_d)} + \sum_{i=1}^{N_u} \frac{\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) (p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2 (1 - p_d)} = \\
&= \sum_{i=1}^{N_u} -\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) c_i + \sum_{i=1}^{N_u} \theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) k_i = \\
&= -\theta \left[\sum_{i=1}^{N_u} (x_{(1)}^t c_i - x_{i(1)} c_i - x_{(1)}^t k_i + x_{i(1)} k_i) \right]. \tag{C.69}
\end{aligned}$$

Estableciendo:

$$k_i = \frac{p_d - \alpha}{(1 - p_d) \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} \tag{C.70}$$

y

$$c_i = k_i / p_d. \tag{C.71}$$

Al igual que en el caso sin censura, puede aparecer una indeterminación en la función del gradiente (C.69) si existe sensor cuya posición sea $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}^t$. Para solucionarlo se calcula la aproximación del límite del término correspondiente a dicho sensor:

$$\lim_{\mathbf{x}^t \rightarrow \mathbf{x}_j} \nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{L}^j \approx \frac{-\theta(p_d - \alpha)}{p_d}. \tag{C.72}$$

Por otra parte, es posible establecer la expresión de la primera componente del gradiente de forma más compacta, mediante el uso de las matrices que aparecen en la Tabla C.10. Dicha ecuación resulta:

$$\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{L} = -\theta [x_{(1)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{c} - x_{(1)}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{k}]. \tag{C.73}$$

Vector	Dimensiones	Elementos
$\mathbf{X}_{(1)}$	$1 \times N_u$	$x_{i(1)}$ (con $y_i = 1$)
$\mathbf{1}$	$N_u \times 1$	1
\mathbf{k}	$N_u \times 1$	k_i
\mathbf{c}	$N_u \times 1$	c_i

Tabla C.10: *Vectores del gradiente para ML censurado con p_d de tipo exponencial.*

Mediante el mismo procedimiento, se obtiene la segunda componente del gradiente en este caso:

$$\nabla_{x_{(2)}^t} \mathbf{L} = -\theta [x_{(2)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{c} - x_{(2)}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{k}]. \quad (\text{C.74})$$

Ha de tenerse en cuenta que, en esta expresión, también aparece una indeterminación en el punto $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}_j$. La aproximación del límite del término correspondiente tiene el mismo valor que en el caso anterior (C.72).

Por último, si \mathbf{X} es definida como la matriz $2 \times N_u$ cuyas columnas son las coordenadas de los sensores con lecturas positivas y \mathbf{x}^t se establece como un vector columna de dimensiones 2×1 , entonces es posible obtener una expresión final para el gradiente $\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t)$ a partir de las componentes calculadas. Dicho gradiente es un vector 2×1 de la forma:

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}^t) = -\theta [\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X} \mathbf{c} - \mathbf{x}^t \mathbf{k}^T \mathbf{1} + \mathbf{X} \mathbf{k}]. \quad (\text{C.75})$$

Considerando que, si aparece alguna indeterminación debido al valor de la posición \mathbf{x}_j de algún sensor, su contribución al gradiente debe ser sustituida por:

$$\nabla \mathbf{L}^j = \left(\frac{-\theta(p_d - \alpha)}{p_d} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.76})$$

C.3.3. Riesgo empírico sin censura

El riesgo empírico que el fusor debe minimizar se expresa como:

$$\mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \sum_{i:y_i=0} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha) - \sum_{i:y_i=1} p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha). \quad (\text{C.77})$$

A continuación, se aplica el operador nabla a dicho riesgo empírico respecto a la variable \mathbf{x}^t para obtener el gradiente. La primera componente del mismo resulta:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}_{(1)}^t} \mathbf{R}_e &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{(1)}^t} \left[\sum_{i:y_i=0} \left(\alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{\frac{1}{2}}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i:y_i=1} \left(\alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] = \\
&= \sum_{i:y_i=0} \frac{-2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{2 [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}} (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} + \\
&\quad + \sum_{i:y_i=1} \frac{2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{2 [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}} (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} = \\
&= \sum_{i:y_i=0} -\theta \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} (p_d - \alpha) + \sum_{i:y_i=1} \theta \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} (p_d - \alpha) = \\
&= \sum_{i=1}^N -\theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \underbrace{\frac{(p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2}}_{c_i} (1 - y_i) + \sum_{i=1}^N \theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \underbrace{\frac{(p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2}}_{c_i} y_i = \\
&= \theta \left[\sum_{i=1}^N (-x_{(1)}^t c_i (1 - y_i) + x_{i(1)} c_i (1 - y_i) + x_{(1)}^t c_i y_i - x_{i(1)} c_i y_i) \right], \quad (\text{C.78})
\end{aligned}$$

donde se establece:

$$c_i = \frac{(p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2}. \quad (\text{C.79})$$

Si además, se define un conjunto de vectores que agrupan las variables de la Ecuación (C.78), tal y como aparece en la Tabla C.11, esta expresión puede formularse en forma matricial como:

$$\nabla_{\mathbf{x}_{(1)}^t} \mathbf{R}_e = \theta \left[-x_{(1)}^t \mathbf{c}^T (\mathbf{1} - \mathbf{y}) + \mathbf{X}_{(1)} [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_c + x_{(1)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{y}_c \right]. \quad (\text{C.80})$$

No obstante, es preciso indicar que existe una indeterminación en esta función en el caso de que la posición de un sensor j -ésimo de la red cumpla $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}^t$. En ese caso la contribución de dicho sensor al gradiente se sustituye por una aproximación del límite:

$$\lim_{\mathbf{x}^t \rightarrow \mathbf{x}_j} \nabla_{\mathbf{x}_{(1)}^t} \mathbf{R}_e^j \approx \begin{cases} \theta(p_d - \alpha) & \text{si } y_j = 1 \\ -\theta(p_d - \alpha) & \text{si } y_j = 0. \end{cases} \quad (\text{C.81})$$

Vector	Dimensiones	Elementos
$\mathbf{X}_{(1)}$	$1 \times N$	$x_{i(1)}$
$\mathbf{1}$	$N \times 1$	1
\mathbf{y}	$N \times 1$	y_i
\mathbf{c}	$N \times 1$	c_i
\mathbf{y}_c	$N \times 1$	$y_{ci} = y_i c_i$
$[\mathbf{1} - \mathbf{y}]_c$	$N \times 1$	$[1 - y]_{ci} = c_i(1 - y_i)$

Tabla C.11: *Vectores del gradiente para ERM con p_d de tipo exponencial.*

De forma análoga se obtiene la la segunda componente del gradiente, expresándose en forma matricial:

$$\nabla_{x_{(2)}^t} \mathbf{R}_e = \theta \left[-x_{(2)}^t \mathbf{c}^T (\mathbf{1} - \mathbf{y}) + \mathbf{X}_{(2)} [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_c + x_{(2)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{y}_c \right]. \quad (\text{C.82})$$

Esta función, presenta el mismo problema de indeterminación que la expresión de la primera componente, siendo válido el límite de la Ecuación (C.81) para resolverla.

Finalmente, la expresión completa del gradiente se formula como:

$$\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \theta \left[-\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T (\mathbf{1} - \mathbf{y}) + \mathbf{X} [\mathbf{1} - \mathbf{y}]_c + \mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{y}_c \right]. \quad (\text{C.83})$$

Siendo \mathbf{X} la matriz $2 \times N$ cuyas columnas son las coordenadas de los sensores de la red, y \mathbf{x}^t un vector columna de dimensiones 2×1 . Además, ha de tenerse en cuenta, que la contribución de los sensores \mathbf{x}_j que generen una indeterminación en el gradiente, debe ser sustituida por:

$$\nabla \mathbf{R}_e^j = (\theta(p_d - \alpha) y_j - \theta(p_d - \alpha)(1 - y_j)) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.84})$$

C.3.4. Riesgo empírico con censura

En el último escenario, el centro de fusión sólo dispone de las N_u lecturas de los sensores que han detectado positivamente al agente. Por lo tanto, la función de coste que debe minimizar es:

$$\mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \sum_{i: y_i=1} -p_d(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}_i, \alpha). \quad (\text{C.85})$$

Para obtener la fórmula del gradiente, el riesgo empírico es derivado respecto las dos componentes de \mathbf{x}^t . En primer lugar:

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{R}_e &= \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^t} \left[\sum_{i=1}^{N_u} - \left(\alpha + (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] = \\
&= \sum_{i=1}^{N_u} \frac{2\theta(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{2 [(x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2]^{1/2}} (1 - \alpha - \beta) e^{-\theta \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} = \\
&= \sum_{i=1}^{N_u} \theta \frac{(x_{(1)}^t - x_{i(1)})}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2} (p_d - \alpha) = \sum_{i=1}^{N_u} \theta (x_{(1)}^t - x_{i(1)}) \underbrace{\frac{(p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2}}_{c_i} = \\
&= \theta \left[\sum_{i=1}^{N_u} (x_{(1)}^t c_i - x_{i(1)} c_i) \right]. \tag{C.86}
\end{aligned}$$

Definiendo c_i como:

$$c_i = \frac{(p_d - \alpha)}{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2}. \tag{C.87}$$

Expresando el gradiente obtenido de forma matricial:

$$\nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{R}_e = \theta [x_{(1)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{c}]. \tag{C.88}$$

Donde los vectores utilizados se definen en la Tabla C.12.

Vector	Dimensiones	Elementos
$\mathbf{X}_{(1)}$	$1 \times N_u$	$x_{i(1)}$ (con $y_i = 1$)
$\mathbf{1}$	$N_u \times 1$	1
\mathbf{c}	$N_u \times 1$	c_i

Tabla C.12: Vectores del gradiente para ERM censurado con p_d de tipo exponencial.

Sin embargo, es preciso indicar que existe una indeterminación en el gradiente obtenido en el caso de que la posición de un sensor j -ésimo de la red cumpla $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}^t$. En ese caso, la contribución de dicho sensor al gradiente se sustituye por una aproximación del límite de dicho término:

$$\lim_{\mathbf{x}^t \rightarrow \mathbf{x}_j} \nabla_{x_{(1)}^t} \mathbf{R}_e^j \approx \theta(p_d - \alpha). \tag{C.89}$$

De igual forma, se obtiene la otra componente del gradiente, resultando:

$$\nabla_{x_{(2)}^t} \mathbf{R}_e = \theta \left[x_{(2)}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{c} \right]. \quad (\text{C.90})$$

Esta función, presenta el mismo problema de indeterminación que la expresión de la primera componente, siendo válido el límite descrito en (C.89) para resolverla.

Finalmente, si \mathbf{X} es definido como la matriz $2 \times N_u$ cuyas columnas son las coordenadas de los sensores de la red con lecturas positivas y \mathbf{x}^t como un vector columna de dimensiones 2×1 , entonces el gradiente $\nabla \mathbf{R}_e$ puede expresarse como un vector 2×1 de la forma:

$$\nabla \mathbf{R}_e(\mathbf{x}^t) = \theta \left[\mathbf{x}^t \mathbf{c}^T \mathbf{1} - \mathbf{X} \mathbf{c} \right]. \quad (\text{C.91})$$

Ha de tenerse en consideración, que si la posición de alguno de los sensores con lectura $y_j = 1$ satisface $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}^t$, es necesario sustituir su contribución al gradiente por el término:

$$\nabla \mathbf{R}_e^j = (\theta(p_d - \alpha)) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.92})$$

Apéndice D

Cálculo del estimador basado en distancias

Para una mejor comprensión del estimador basado en distancias que se estudia en este proyecto, en el siguiente apéndice, se detalla la obtención de la expresión final del mismo.

Como punto de partida, se realiza dicha demostración para un caso general en el que el fusor dispone de las lecturas de todos los sensores de la red. A continuación, se describe la ecuación del estimador para el escenario donde sólo las N_u lecturas de los sensores que han detectado positivamente al agente son utilizadas, que es el método que se estudia en este trabajo.

D.1. Estimador sin censura

Teniendo en consideración, que todos los sensores envían sus lecturas al centro de fusión, el estimador puede enunciarse como el punto \mathbf{x}^t que minimice la función de coste basado en distancias $\mathbf{C}(\mathbf{x}^t)$:

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \arg \min_{\mathbf{x}^t} \left[\sum_{i:y_i=1} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2 - \sum_{i:y_i=0} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2 \right]. \quad (\text{D.1})$$

Para encontrar el mínimo buscado, es necesario derivar dicha función de coste respecto a la variable \mathbf{x}^t . El cálculo de la primera componente del estimador se realiza como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}^t)}{\partial x_{(1)}^t} &= \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^t} \left[\sum_{i:y_i=1} \left((x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i:y_i=0} \left((x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2 \right) \right] = \\
&= \sum_{i:y_i=1} 2(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) - \sum_{i:y_i=0} 2(x_{(1)}^t - x_{i(1)}). \tag{D.2}
\end{aligned}$$

Igualando a cero esta derivada, y despejando el valor de $\mathbf{x}_{(1)}^t$ se obtiene la ecuación de la primera componente del estimador:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}^t)}{\partial x_{(1)}^t} \Rightarrow \\
0 &= 2N_u x_{(1)}^t - 2 \sum_{i:y_i=1} x_{i(1)} - 2N_c x_{(1)}^t + 2 \sum_{i:y_i=0} x_{i(1)} \Rightarrow \\
0 &= 2(N_u - N_c)x_{(1)}^t - 2 \sum_{i=1}^N [x_{i(1)}y_i - x_{i(1)}(1 - y_i)]. \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t = \frac{1}{(N_u - N_c)} \sum_{i=1}^N [x_{i(1)}y_i - x_{i(1)}(1 - y_i)]. \tag{D.4}$$

Definiendo $\mathbf{X}_{(1)}$ como el vector $1 \times N$ en el que sus elementos son las primeras coordenadas $\mathbf{x}_{i(1)}$ de cada uno de los sensores de la red, \mathbf{y} el vector columna que contiene las lecturas de los sensores y_i y $\mathbf{1}$ como un vector columna de N unos, la ecuación puede expresarse en notación matricial como:

$$\hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t = \frac{1}{(N_u - N_c)} [\mathbf{X}_{(1)}\mathbf{y} - \mathbf{X}_{(1)}(\mathbf{1} - \mathbf{y})]. \tag{D.5}$$

Análogamente, se obtiene la expresión de la segunda componente:

$$\hat{\mathbf{x}}_{(2)}^t = \frac{1}{(N_u - N_c)} [\mathbf{X}_{(2)}\mathbf{y} - \mathbf{X}_{(2)}(\mathbf{1} - \mathbf{y})]. \tag{D.6}$$

Por lo tanto, la forma final del estimador basado en distancias es:

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \frac{1}{(N_u - N_c)} [\mathbf{X}\mathbf{y} - \mathbf{X}(\mathbf{1} - \mathbf{y})]. \tag{D.7}$$

Para ello, \mathbf{X} es una matriz $2 \times N$ que contiene la posición de los sensores en la red.

Adicionalmente, se comprueba que el punto hallado corresponde a un mínimo o a un máximo de la función de coste, calculando el determinante de la matriz hessiana:

$$\begin{aligned} |H(\mathbf{x}_{(1)}^t, \mathbf{x}_{(2)}^t)| &= \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{C}(\mathbf{x}^t)}{\partial x_{(1)}^t{}^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{C}(\mathbf{x}^t)}{\partial x_{(1)}^t \partial x_{(2)}^t} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{C}(\mathbf{x}^t)}{\partial x_{(2)}^t \partial x_{(1)}^t} & \frac{\partial^2 \mathbf{C}(\mathbf{x}^t)}{\partial x_{(2)}^t{}^2} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 2(N_u - N_c) & 0 \\ 0 & 2(N_u - N_c) \end{bmatrix} \right| = \\ &= 4(N_u - N_c)^2. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Por lo que:

$$|H(\hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t, \hat{\mathbf{x}}_{(2)}^t)| = 4(N_u - N_c)^2 \quad (\text{D.9})$$

y

$$\mathbf{C}''_{\mathbf{x}_{(1)}^t \mathbf{x}_{(1)}^t}(\hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t \hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t) = 2(N_u - N_c). \quad (\text{D.10})$$

Estos resultados provocan que:

1. Si $N_u > N_c \Rightarrow |H(\hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t, \hat{\mathbf{x}}_{(2)}^t)| > 0$ y $\mathbf{C}''_{\mathbf{x}_{(1)}^t \mathbf{x}_{(1)}^t}(\hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t \hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t) > 0 \Rightarrow$ Mínimo.
2. Si $N_u < N_c \Rightarrow |H(\hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t, \hat{\mathbf{x}}_{(2)}^t)| > 0$ y $\mathbf{C}''_{\mathbf{x}_{(1)}^t \mathbf{x}_{(1)}^t}(\hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t \hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t) < 0 \Rightarrow$ Máximo.
3. Si $N_u = N_c \Rightarrow$ existe una indeterminación en el estimador (Ecuación (D.7)).

D.2. Estimador con censura

En este caso, el fusor sólo dispone de las N_u lecturas positivas. El estimador se enuncia como:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}^t) = \sum_{i:y_i=1} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_i\|_2^2. \quad (\text{D.11})$$

Mediante el mismo procedimiento que en el apartado anterior, se calcula la primera componente del estimador:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}^t)}{\partial x_{(1)}^t} &= \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^t} \left[\sum_{i:y_i=1} (x_{(1)}^t - x_{i(1)})^2 + (x_{(2)}^t - x_{i(2)})^2 \right] = \\ &= \sum_{i:y_i=1} 2(x_{(1)}^t - x_{i(1)}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Luego,

$$\hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t = \sum_{i=1}^{N_u} \frac{x_{i(1)}}{N_u}. \quad (\text{D.13})$$

Expresándola con notación matricial:

$$\hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t = \frac{1}{N_u} \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{1}, \quad (\text{D.14})$$

donde $\mathbf{X}_{(1)}$ es el vector $1 \times N_u$ en el que sus elementos son las primeras coordenadas $\mathbf{x}_{i(1)}$ de cada los sensores con lecturas positivas, y $\mathbf{1}$ es un vector columna de N_u unos.

Procediendo del mismo modo, se obtiene la expresión de la segunda componente del estimador:

$$\hat{\mathbf{x}}_{(2)}^t = \frac{1}{N_u} \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{1}. \quad (\text{D.15})$$

Definiendo \mathbf{X} como una matriz $2 \times N_u$ que contiene la posición de los sensores que han detectado positivamente al agente, el estimador completo se formula:

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \frac{1}{N_u} \mathbf{X} \mathbf{1}. \quad (\text{D.16})$$

Finalmente, se comprueba si el estimador corresponde a un mínimo o a un máximo de la función de coste, mediante la matriz hessiana:

$$|H(\mathbf{x}_{(1)}^t, \mathbf{x}_{(2)}^t)| = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{C}(\mathbf{x}^t)}{\partial x_{(1)}^t{}^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{C}(\mathbf{x}^t)}{\partial x_{(1)}^t \partial x_{(2)}^t} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{C}(\mathbf{x}^t)}{\partial x_{(2)}^t \partial x_{(1)}^t} & \frac{\partial^2 \mathbf{C}(\mathbf{x}^t)}{\partial x_{(2)}^t{}^2} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 2N_u & 0 \\ 0 & 2N_u \end{bmatrix} \right| = 4N_u^2. \quad (\text{D.17})$$

Con este resultado, si $N_u \neq 0$ se cumple que:

$$|H(\hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t, \hat{\mathbf{x}}_{(2)}^t)| = 4N_u^2 > 0 \quad (\text{D.18})$$

y

$$\mathbf{C}''_{\mathbf{x}_{(1)}^t \mathbf{x}_{(1)}^t}(\hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t \hat{\mathbf{x}}_{(1)}^t) = 2N_u > 0, \quad (\text{D.19})$$

por lo que en este caso existe un mínimo local en la función de coste en el punto $\hat{\mathbf{x}}^t$. Si $N_u = 0$ existe una indeterminación en el estimador (Ecuación (D.16)).

Glosario

ADC	<i>Analog to Digital Converter.</i>
BER	<i>Bit Error Ratio.</i>
CFAR	<i>Constant False Alarm Rate.</i>
CSMA	<i>Carrier Sense Multiple Access.</i>
DARPA	<i>Defense Advanced Research Projects Agency.</i>
DC	<i>Direct Current.</i>
DOA	<i>Direction Of Arrival.</i>
DPM	<i>Dinamyc Power Management.</i>
DSN	<i>Distributed Sensor Networks.</i>
DVS	<i>Dinamic Voltage Scaling.</i>
ERM	<i>Empirical Risk Minimization.</i>
FDMA	<i>Frecuency Division Multiple Access.</i>
GAF	<i>Geographical Adaptive Fidelity.</i>
GPS	<i>Global Positioning System.</i>
LECH	<i>Low-Energy Adaptive Clustering Hierarchy.</i>
LO	<i>Locally Optimum.</i>
MAP	<i>Maximum A Posteriori.</i>
MCU	<i>Micro-Controller Unit.</i>
ML	<i>Maximum Likelihood.</i>
PFA	<i>Probabilidad de Falsa Alarma.</i>

QoS	<i>Quality of Service.</i>
RSS	<i>Received Signal Strength.</i>
SAR	<i>Secuencial Assignment Routing.</i>
SensIT	<i>Sensor Information Technology.</i>
SIVAM	<i>System for the Vigilance of the Amazon.</i>
SMACS	<i>Self-Organizing Medium Access Control for Sensor Networks.</i>
SNR	<i>Signal to Noise Ratio.</i>
TDMA	<i>Time Division Multiple Access.</i>
TDOA	<i>Time Difference Of Arrival.</i>
UWB	<i>Ultra Wideband.</i>

Bibliografía

- [Aakvaag y Frey, 2006] N. AAKVAAG y J. E. FREY. “Redes de Sensores Inalámbricas”, *ABB*, págs. 39–42, febrero 2006.
- [Akyildiz et al., 2002] I. F. AKYILDIZ, W. SU, Y. SANKARASUBRAMANIAM, y E. CAYIRCI. “A survey on sensor networks”, *IEEE Commun. Mag.*, 40:102–114, agosto 2002.
- [Al-Ali et al., 2005] A. AL-ALI, Y. R. AJI, H. F. OTHMAN, y F. T. FAKHREDDIN. “Wireless Smart Sensors Networks Overview”. En *WOCN*, págs. 536–540. Marzo 2005.
- [Appadwedula et al., 2005] S. APPADWEDULA, V. V. VEERAVALLI, y D. L. JONES. “Energy-efficient detection in sensor networks”, *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 23:693–702, abril 2005.
- [Artés-Rodríguez, 2004] A. ARTÉS-RODRÍGUEZ. “Decentralized detection in sensor networks using range information”. En *Proc. ICASSP 2004*, Montreal, PQ, Canada. Mayo 2004.
- [Artés-Rodríguez et al., 2004] A. ARTÉS-RODRÍGUEZ, M. LÁZARO, y L. TONG. “Target location estimation in sensor networks using range information”. En *Proceedings of the IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing workshop*, págs. 19–21. Julio 2004.
- [Blum et al., 1997] R. S. BLUM, S. A. KASSAM, y H. V. POOR. “Distributed detection with multiple sensors: Part II-Advanced topics”, *Proc. IEEE*, 85:64–79, enero 1997.
- [Boser et al., 2001] B. E. BOSER, L. DOHERTY, B. A. WARNEKE, y K. S. J. PISTER. “Energy and performance considerations for smart dust”, *Int. J. of Par. Distr. Sys. and Netw.*, 4(3):121–133, 2001.
- [Chair y Varshney, 1986] Z. CHAIR y P. VARSHNEY. “Optimal data fusion in multiple sensor detection systems”, *IEEE Trans. AES*, 22(1):98–101, enero 1986.

- [Chamberland y Veeravalli, 2004] J. F. CHAMBERLAND y V. V. VEERAVALLI. “Asymptotic results for decentralized detection in power constrained wireless sensor networks”, *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 22:1007–1015, agosto 2004.
- [Chen et al., 2001] B. CHEN, K. JAMIESON, H. BALAKRISHNAN, y R. MORRIS. “Span: An energy-efficient coordination algorithm for topology maintenance in ad hoc wireless networks”. En *Proc. ACM MobiCom’01*, págs. 85–96. Julio 2001.
- [Chong y Kumar, 2003] C. Y. CHONG y S. KUMAR. “Sensor networks: Evolution, opportunities, and challenges”, *Proc. IEEE*, 91:1247–1256, agosto 2003.
- [DARPA, 2011] DARPA. “Página Web de la Defense Advanced Research Projects Agency”. 2011. <http://www.darpa.mil>.
- [Dasarathy, 1994] B. DASARATHY. “Decision Fusion”. En *IEEE Comp. Soc.*, Los Alamitos, CA, USA. 1994.
- [García, 2008] E. M. GARCÍA. “Técnicas de Localización en Redes Inalámbricas de Sensores”. En *Actas XXI Curso de Verano de la Universidad de Castilla-La Mancha*, págs. 77–98. Junio 2008.
- [Heinzelman et al., 2000] W. R. HEINZELMAN, A. CHANDRAKASAN, y H. BALAKRISHNAN. “Energy-efficient communication protocol for wireless microsensor networks”. En *Proc. Hawaii Int’l. Conf. Sys. Sci.*, págs. 1–10. Enero 2000.
- [Kaplan et al., 2001] L. M. KAPLAN, Q. LE, y P. MOLNAR. “Maximum likelihood methods for bearings-only target localization”. En *Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP2001)*, págs. 3001–3004, Salt Lake City, UT, USA. Mayo 2001.
- [Kim y Ortega, 2006] Y. H. KIM y A. ORTEGA. “Maximum a posteriori (MAP)-based algorithm for distributed source localization using quantized acoustic sensor readings”. En *Proc. ICASSP*. 2006.
- [Li y Hu, 2003] D. LI y Y. H. HU. “Energy based collaborative source localization using acoustic microsensor array”. En *EURASIP J. Appl. Signal Process.*, volumen 4, págs. 321–337. 2003.
- [Lázaro et al., 2009] M. LÁZARO, M. SÁCHEZ-FERNÁNDEZ, y A. ARTÉS-RODRIGUEZ. “Optimal Sensor Selection in Binary Heterogeneous Sensor Networks”, *IEEE Trans. Signal Process.*, 57:1577–1587, 2009.

- [Marano et al., 2006] S. MARANO, V. MATTA, y P. WILLETT. “Quantizer precision for distributed estimation in a large sensor network”, *IEEE Trans. Signal Process.*, 54:4073–4078, octubre 2006.
- [Niu y Varshney, 2006] R. NIU y P. K. VARSHNEY. “Target Location Estimation in Sensor Networks With Quantized Data”, *IEEE Trans. Signal Process.*, 54(12):4519–4528, 2006.
- [Petrovic et al., 2003] D. PETROVIC, R. C. SHAH, K. RAMCHANDRAN, y J. RABAEY. “Data funnelling: Route with aggregation and compression for wireless sensor networks”. En *Proceedings of the 1st IEEE International Workshop on Sensor Network Protocols and Applications (SNPA)*, págs. 156–162, Anchorage, Alaska, USA. Mayo 2003.
- [Polychronopoulos y Tsitiklis, 1990] G. POLYCHRONOPOULOS y J. N. TSITIKLIS. “Explicit solutions for some simple decentralized detection problems”, *IEEE Trans. AES*, 26:282–292, marzo 1990.
- [Raghunathan et al., 2002] V. RAGHUNATHAN, C. SCHURGERS, S. PARK, y M. B. SRIVASTAVA. “Energyaware wireless microsensor networks”, *IEEE Signal Process. Mag.*, 19:40–50, marzo 2002.
- [Rago et al., 1996] C. RAGO, P. WILLETT, y Y. BAR-SHALOM. “Censoring sensors: A low communication-rate scheme for distributed detection”, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 32:554–568, abril 1996.
- [Reed et al., 1999] C. W. REED, R. HUDSON, y K. YAO. “Direct joint source localization and propagation speed estimation”. En *Proc. ICASSP’99*, Phoenix, AZ, USA. 1999.
- [Sheng y Hu, 2005] X. SHENG y Y. H. HU. “Maximum likelihood multiple-source localization using acoustic energy measurements with wireless sensor networks”, *IEEE Trans. Signal Process.*, 53(1):44–53, 2005.
- [Shih et al., 2001] E. SHIH, S.-H. CHO, N. ICKES, R. MIN, A. SINHA, A. WANG, y A. CHANDRAKASAN. “Physical layer driven protocol and algorithm design for energy-efficient wireless sensor networks”. En *Proc. ACM MobiCom’01*, págs. 272–287. Julio 2001.
- [Sohrabi et al., 2000] K. SOHRABI, J. GAO, V. AILAWADHI, y G. J. POTTIE. “Protocols for Self-Organization of a Wireless Sensor Network”, *IEEE Pers. Commun.*, págs. 16–27, octubre 2000.
- [Stojmenovic, 2005] I. STOJMENOVIC. *Handbook of Sensor Networks: Algorithms and Architectures*. Wiley. 2005.

- [Tay et al., 2007] W. P. TAY, J. N. TSITSIKLIS, y M. Z. WIN. “Asymptotic performance of a censoring sensor network”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, 53:4191–4209, noviembre 2007.
- [Tolstory, 1993] A. TOLSTORY. “Matched-Field Processing for Underwater Acoustics”. En *World Scientific*, Singapore. 1993.
- [Tsitsiklis, 1988] J. N. TSITSIKLIS. “Decentralized detection by a large number of sensors”, *Math. Contr. Signals Syst.*, 1:167–182, 1988.
- [Viswanathan y Varshney, 1997] R. VISWANATHAN y P. K. VARSHNEY. “Distributed detection with multiple sensors: Part I-Fundamentals”, *Proc. IEEE*, 85:54–63, enero 1997.
- [Woo y Culler, 2001] A. WOO y D. E. CULLER. “A transmission control scheme for media access in sensor networks”. En *Proc. ACM MobiCom’01*, págs. 221–235, Rome, Italy. Julio 2001.
- [Xu et al., 2001] Y. XU, J. HEIDEMANN, y D. ESTRIN. “Geography-informed energy conservation for ad hoc routing”. En *Proc. ACM MobiCom’01*, págs. 70–84. Julio 2001.
- [Yamamoto y Ohtsuki, 2005] H. YAMAMOTO y T. OHTSUKI. “Wireless Sensor Networks with Local Fusion”. En *Proc. IEEE Globecom’05*. 2005.
- [Yang et al., 2009] C. YANG, L. CHEN, D. CHEN, y L. XIE. “Topology Optimization for Target Localization in Wireless Sensor Networks”. En *Proc. in International Conference on Networks Security, Wireless Communications and Trusted Computing*. 2009.
- [Yao et al., 1998] K. YAO, R. E. HUDSON, C. W. REED, D. CHEN, y F. LORENZELLI. “Blind beamforming on a randomly distributed sensor array system”, *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 16(8):1555–1567, octubre 1998.
- [Zhao y Guibas, 2004] F. ZHAO y L. GUIBAS. *Wireless Sensor Networks*. Elsevier. 2004.